

## 目录

第一讲.....	循环小数的认识
第二讲.....	相同的余数
第三讲.....	分类枚举
三讲一测.....	<b>1-3</b> 讲阶段复习
第四讲.....	染色与覆盖
第五讲.....	分数四则混合运算
第六讲.....	比的应用
三讲一测.....	<b>4-6</b> 讲阶段复习
第七讲.....	四边形中的面积关系



# 第1讲 循环小数的认识 B版

## 一、预习

### 1. 课前热身

1 2018~2019学年上海长宁区愚园路第一小学四年级下学期周测第十周第19题

下列个数中，与78.03不相等的数是（ ）。

A. 78.030

B. 78.0300

C. 78.003

D. 78.03000

答案 C

解析 小数点末尾的零可以去掉，不影响数的大小，但会影响计数单位。

$$78.03 = 78.030 = 78.0300 = 78.03000, 78.03 > 78.003.$$

故选C。

2 2018~2019学年北京海淀区五年级上学期期末第2题

下面的数中最大的是（ ）。

A. 3.02

B. 3.0202...

C. 3.022

D. 3.019

答案 C

解析 首先个位，小数点后一位都是3和0，小数点后第二位D是1其他都是2，所以D最小，小数点后第三位，C是2，A和B都是0，所以C最大。

3 2018~2019学年陕西西安长安区西安市庆安小学五年级上学期期中第17题1分

下面算式商是循环小数的是（ ）。

A.  $7.8 \div 1.6$

B.  $11 \div 1.5$

C.  $5.4 \div 0.18$



**答案** B

**解析** A .  $7.8 \div 1.6 = 4.875$  ;

B .  $11 \div 1.5 = 7.\dot{3}$  ;

C .  $5.4 \div 0.18 = 30$  ;

循环小数是指一个数的小数部分从某一位起，一个或几个数字依次重复出现的无限小数，B选项3循环。

故选B。

## 2. 知识GPS

### 本讲内容（运算求解能力）

循环小数的周期性

循环小数比大小

循环小数加减法

### 前铺知识

小数的认识与计算，分数初识

### 后续知识

循环小数的计算

分小四则混合运算

### 校内衔接

人教版五年级上册 第3单元：循环小数

### 教学目标

掌握循环小数的周期性问题

解决循环小数比大小和加减法问题



### 教学重点

循环小数的周期性与加减运算

### 教学难点

循环小数的加减运算

## 3. 板书设计

### 一、循环小数的产生

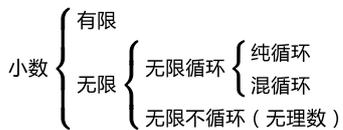
除不尽，余数出现周期

### 二、循环小数的表示

循环节：依次不断重复出现的数字

循环点：在第一个循环节的首位和末位数字上面各记一个圆点

### 三、小数的分类



### 四、计算

循环小数加减法：列竖式

分数加减法：转化为小数

## 4. 教学说明

### 模块一：循环小数初识

【探索1】认识循环小数周期

【例1】循环小数周期性

【例2】循环小数周期性的逆用

### 模块二：加循环点比大小



【探索2】循环小数比大小

【例3】加循环点比大小

【例4】加循环点求最大与最小

【挑战1】反推循环点位置

### 模块三：循环小数的加减法

【例5】循环小数加减法

【挑战2】将分数转化为循环小数进行运算

## 5. 追本溯源

同学们你们知道圆周率 $\pi$ 的故事么？

### 【参考话术】

约1500年前，中国有一位伟大的数学家和天文学家祖冲之，他计算出圆周率应在3.1415926和3.1415927之间，成为世界上第一个把圆周率的值精确到7位小数的人。他的这项伟大成就比外国数学家得出这样精确数值的时间，至少要早一千年。

$\pi$ 在我们生活中除了计算圆的面积周长外，还有一个奇妙的用处，那就是他可以检验一个人的记忆力，因为我们知道 $\pi$ 是一个无限且不循环的小数，等于

3.14159265358979323846.....后面的数字无穷无尽且永不重复，通过速记圆周率是一个锻炼记忆力的好办法！

圆周率是无限不循环小数，没有规律可循，我们今天学习一个无限但是有规律的小数，它的名字叫做无限循环小数！

## 6. 课内链接

以下是人教版五年级上册课本的截图，供老师参考：



## 循环小数



7

哇！王鹏 400 m 只跑了 75 秒！

平均每秒跑多少米呢？



观察这个竖式，你发现了什么？

$$400 \div 75 = \underline{\hspace{2cm}}$$

余数怎么总是“25”？



$$\begin{array}{r}
 5.333 \\
 75 \overline{) 400} \\
 \underline{375} \phantom{0} \\
 250 \\
 \underline{225} \\
 250 \\
 \underline{225} \\
 250 \\
 \underline{225} \\
 25
 \end{array}$$



继续除下去，可能永远也除不完。

商的小数部分总是重复出现“3”。



8

先计算，再说一说这些商的特点。

$$28 \div 18 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$78.6 \div 11 = \underline{\hspace{2cm}}$$

一个数的小数部分，从某一位起，一个数字或者几个数字依次不断重复出现，这样的小数叫做**循环小数**。像上面的  $5.333\cdots$  和  $7.14545\cdots$  都是循环小数。



一个循环小数的小数部分，依次不断重复出现的数字，就是这个循环小数的循环节。例如：

5.333...的循环节是 3。

7.14545...的循环节是 45。

6.9258258...的循环节是 258。

写循环小数时，可以只写第一个循环节，并在这个循环节的首位和末位数字上面各记一个圆点。例如：

5.333...                      写作  $5.\dot{3}$   
 6.9258258...                写作  $6.9\dot{2}5\dot{8}$

## 二、模块1 循环小数初识

### 知识剖析

#### 循环小数的认识：

一个数的小数部分，从某一位起，一个数字或者几个数字依次不断重复出现，这样的小数叫做循环小数。其中依次不断重复出现的数字叫循环节。循环节的位数即循环节长度。

写循环小数时，可以只写第一个循环节，并在这个循环节的首位和末位数字上面各记一个圆点。

如： $0.333\cdots = 0.\dot{3}$ ，读作：零点三，三循环

$2.343434\cdots = 2.\dot{3}\dot{4}$ ，读作：二点三四，三四循环

$5.1674674674\cdots = 5.1\dot{6}7\dot{4}$ ，读作：五点一六七四，六七四循环

### 铺垫1

在寒冷的冬天，博士把宠物猫咪咪当做热水袋，居然还让咪咪做数学题：

$1 \div 3$ 所得的小数，从小数点后第一位起连续1000位数字之和是多少？

你能帮助咪咪解出这道题吗？

**答案**    3000 .

**解析**    一除以三得零点三（三循环），故小数点后的数字均为三，小数点后一千位之和即为3000 .



探索1

2017~2018学年四川成都都江堰市五年级上学期期末第13题1分

$1 \div 7$ 的商的小数部分第20位上的数字是( )。

- A. 1                      B. 4                      C. 7

答案 B

解析  $1 \div 7 = 0.142857142857 \dots$ ，循环周期为6， $20 \div 6 = 3 \dots 2$ ，所以第20位上的数字是4。

例题1

回答下列各题。

- (1) 已知  $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ ，小数点后第100位上的数字是\_\_\_\_\_。
- (2) 已知  $\frac{2}{7} = 0.\dot{2}8571\dot{4}$ ，小数点后前100位的数字和是\_\_\_\_\_。
- (3) 已知  $\frac{3}{7} = 0.\dot{4}2857\dot{1}$ ， $\frac{4}{7} = 0.\dot{5}7142\dot{8}$ ， $\frac{5}{7} = 0.\dot{7}1428\dot{5}$ ， $\frac{6}{7} = 0.\dot{8}5714\dot{2}$ ，仔细观察这些循环小数，你能找到哪些规律？怎样才能快速准确地记住这些循环小数呢，与大家分享一下你的方法吧！

答案 (1) 8

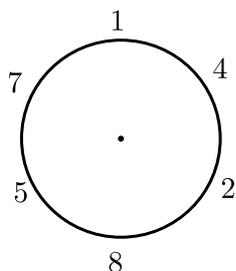
(2) 454

(3) 图示法

解析 (1)  $\frac{1}{7}$ 化成小数后，循环节为142857，重复出现，可以将其看成的周期问题，一共100个数，每6个数字为一个周期， $100 \div 6 = 16 \dots 4$ ，经过16个周期后，最后剩下4个数，1，4，2，8，所以第100位是8。

(2) 由上题意可知，100位数，包含了16个周期，最后剩下4个数，所以这100个数字之和为  $27 \times 16 + 2 + 8 + 5 + 7 = 454$ 。

(3) 将六个数字排成一圈，只要找到商的首位，再从该数字开始顺时针转一圈即为循环节。



**【教学提示】**

神奇的循环小数：142857,又名走马灯数，传说它发现于埃及金字塔内，是一组神奇的数字。它可以说明一个星期为什么有7天：从第一天开始每天增加自己的一倍，变成数字及相邻次序均不变的另一个数（像走马灯一样），直到第七天，这几个数字全都去休息了，取而代之的是999999。巧合的是，《周易》之中也流行九九归一的说法，数字9亦被称为阳，即代表了一个物质阳气的终结，新一轮的周期又要开始了。这种说法刚好和上述数字现象不谋而合。

$$142857 \times 1 = 142857 \text{ (原数字)}, \frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

$$142857 \times 2 = 285714 \text{ (轮值)}, \frac{2}{7} = 0.\dot{2}8571\dot{4}$$

$$142857 \times 3 = 428571 \text{ (轮值)}, \frac{3}{7} = 0.\dot{4}2857\dot{1}$$

$$142857 \times 4 = 571428 \text{ (轮值)}, \frac{4}{7} = 0.\dot{5}7142\dot{8}$$

$$142857 \times 5 = 714285 \text{ (轮值)}, \frac{5}{7} = 0.\dot{7}1428\dot{5}$$

$$142857 \times 6 = 857142 \text{ (轮值)}, \frac{6}{7} = 0.\dot{8}5714\dot{2}$$

$$142857 \times 7 = 999999 \text{ (休息)}$$

除了7以外，其它很多数做分母时的循环小数都有类似的特征，例如13的循环节是076923和153846两个。老师在讲解时可以给学生拓展。

**例题2**

请回答下列各题。

(1) 真分数 $\frac{a}{7}$ 化为小数后，如果从小数点后第一位的数字开始连续若干个数字之和是271，那么a是多少？

(2) 真分数 $\frac{a}{7}$ 化为小数后，如果从小数点后第一位的数字开始连续若干个数字之和是277，那么a是多少？



- (3) 真分数 $\frac{a}{7}$ 化为小数后, 如果从小数点后第一位的数字开始连续若干个数字之和是297, 那么 $a$ 是多少?
- (4) 是否存在自然数 $a$ , 使真分数 $\frac{a}{7}$ 化为小数后, 从小数点后第一位的数字开始连续若干个数字之和是300, 若存在请求出 $a$ ; 若不存在, 请说明理由.

答案

- (1) 1  
 (2) 1或5  
 (3) 1或2或3或4或5或6  
 (4) 不存在

解析

- (1)  $271 \div 27 = 10 \dots\dots 1$ , 于是, 循环节的前若干位数字和为1, 那么仅有 $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ , 故 $a = 1$ .
- (2)  $277 \div 27 = 10 \dots\dots 7$ , 于是, 循环节的前若干位数字和为7,  $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ ,  $\frac{5}{7} = 0.\dot{7}1428\dot{5}$ , 故 $a = 1$ 或5.
- (3)  $297 \div 27 = 11$ , 恰好是11个周期, 于是 $a$ 有6种可能,  $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .
- (4)  $300 \div 27 = 11 \dots\dots 3$ , 于是, 循环节的前若干位数字和为3, 经尝试, 无解.

【教学提示】

本题可让学生自主命题, 随便说一个数字和然后验证一下是否存在, 存在是否唯一.

### 三、模块2 加循环点比大小

探索2

将下列循环小数从小到大排列:  $0.201\dot{5}$ 、 $0.20\dot{1}5$ 、 $0.2\dot{0}15$ 、 $0.\dot{2}015$

答案

$0.2\dot{0}15 < 0.20\dot{1}5 < 0.\dot{2}015 < 0.201\dot{5}$ .

解析

$0.2\dot{0}15 < 0.20\dot{1}5 < 0.\dot{2}015 < 0.201\dot{5}$ .

例题3



请你给下面四个小数的小数部分的适当地地方加上循环点，使不等式成立。

$$0.1996 > 0.1996 > 0.1996 > 0.1996$$

**答案**  $0.\dot{1}99\dot{6} > 0.19\dot{9}\dot{6} > 0.199\dot{6} > 0.199\dot{6}$

**解析**  $0.\dot{1}99\dot{6} > 0.19\dot{9}\dot{6} > 0.199\dot{6} > 0.199\dot{6}$  .

 pk对战

1  $8.14\dot{1} \bigcirc 8.14\dot{1}$  中的  $\bigcirc$  里应填 ( ) .

A. >

B. =

C. <

**答案** C

**解析**  $8.14\dot{1} = 8.141111\dots$  ,  $8.14\dot{1} = 8.1414141\dots$  ,  $8.141111\dots < 8.1414141\dots$  , 所以  $8.14\dot{1} < 8.14\dot{1}$  .

2 比较大小： $0.47\dot{5}$  \_\_\_\_\_  $0.\dot{4}7\dot{5}$

A. >

B. <

**答案** A

**解析**  $0.47\dot{5}$  的循环部分为“5”，相当于  $0.475555\dots$  ;  $0.\dot{4}7\dot{5}$  的循环部分为“475”，相当于  $0.475475\dots$  .  
所以选A

3 下列循环小数中，最大的是 ( ) .

A.  $1.\dot{3}1\dot{3}$

B.  $1.31\dot{3}$

C.  $1.\dot{3}1$

**答案** B

**解析** 展开循环节，如下，



$$1.\dot{3}1\dot{3} = 1.313313\dots$$

$$1.31\dot{3} = 1.313333\dots$$

$$1.\dot{3}1 = 1.313131\dots$$

通过比较，正确选项为B。

4 在有限小数0.2007的小数部分上加一个或两个循环点，能够得到哪些循环小数？请将这些循环小数按照从小到大的顺序排列。

A.  $0.2\dot{0}0\dot{7} < 0.20\dot{0}\dot{7} < 0.\dot{2}00\dot{7} < 0.200\dot{7}$

B.  $0.200\dot{7} < 0.\dot{2}00\dot{7} < 0.200\dot{7}$

C.  $0.2\dot{0}0\dot{7} < 0.20\dot{0}\dot{7} < 0.\dot{2}00\dot{7}$

答案 A

解析 若加上1个循环点，可以得到循环小数 $0.200\dot{7}$ ；

若加上2个循环点，可以得到循环小数 $0.\dot{2}00\dot{7}$ 、 $0.2\dot{0}0\dot{7}$ 、 $0.20\dot{0}\dot{7}$ 。

按照数位依次比较，如下：

$$0.200\dot{7} = 0.20077777\dots$$

$$0.\dot{2}00\dot{7} = 0.20072007\dots$$

$$0.2\dot{0}0\dot{7} = 0.2007007\dots$$

$$0.20\dot{0}\dot{7} = 0.20070707\dots$$

可知， $0.2\dot{0}0\dot{7} < 0.20\dot{0}\dot{7} < 0.\dot{2}00\dot{7} < 0.200\dot{7}$ 。

#### 例题4

1 2015~2016学年全国五年级上学期期中人教

在循环小数 $2.71828\dot{1}$ 的某一位上再添一个表示循环的圆点，使新得到的循环小数尽可能大，请写出新的循环小数。

答案  $2.71\dot{8}28\dot{1}$

解析 点在 $2.71828\dot{1}$ 的从左边数起的第一个8和第二个1的上面，因为后面接的将是8281，是最大的。



2 划去0.571846293的小数点后的5个数字，再添上表示循环节的两个圆点，得到的循环小数中最大的数是 \_\_\_\_\_ ；最小的数是 \_\_\_\_\_ 。

答案 1: 0.869 $\dot{3}$

2: 0.i29 $\dot{3}$

解析 用不同的数字组成多位小数，要使组成的数最大，应当用较大的数占较高的位数；反之，较小的数占较高位数。

### 挑战1

给小数0.643857192添加表示循环节的两个圆点，使得整个循环小数的小数点后第100位数字是1，那么这个循环小数是 \_\_\_\_\_ 。

答案 0.643857i9 $\dot{2}$

解析 方法一：枚举法：

第二个循环点一定加在数字2上，第一个循环点可能加在前面8个数字上，分别枚举这8种情况：

若小数为0.6 $\dot{4}$ 385719 $\dot{2}$ ，则循环节有9位。 $100 \div 9 = 11 \dots\dots 1$ ，第100位数字是6，不符。

若小数为0.6 $\dot{4}$ 385719 $\dot{2}$ ，则循环节有8位。 $(100 - 1) \div 8 = 12 \dots\dots 3$ ，第100位数字是8，不符。

若小数为0.64 $\dot{3}$ 85719 $\dot{2}$ ，则循环节有7位。 $(100 - 2) \div 7 = 14$ ，第100位数字是2，不符。

若小数为0.643 $\dot{8}$ 5719 $\dot{2}$ ，则循环节有6位。 $(100 - 3) \div 6 = 16 \dots\dots 1$ ，第100位数字是8，不符。

若小数为0.6438 $\dot{5}$ 719 $\dot{2}$ ，则循环节有5位。 $(100 - 4) \div 5 = 19 \dots\dots 1$ ，第100位数字是5，不符。

若小数为0.64385 $\dot{7}$ 19 $\dot{2}$ ，则循环节有4位。 $(100 - 5) \div 4 = 23 \dots\dots 3$ ，第100位数字是9，不符。

若小数为0.643857i9 $\dot{2}$ ，则循环节有3位。 $(100 - 6) \div 3 = 31 \dots\dots 1$ ，第100位数字是1，符合。

若小数为0.6438571 $\dot{9}$  $\dot{2}$ ，则循环节有2位。 $(100 - 7) \div 2 = 46 \dots\dots 1$ ，第100位数字是9，不符。

故该循环小数为0.643857i9 $\dot{2}$ 。

方法二：第100位是1即第102位是2。设循环节有 $a$ 位( $3 \leq a \leq 9$ )， $102 - 9 = 93$ ，则 $a$ 是93的因数， $93 = 3 \times 31$ ， $a = 3$ 。所以这个循环小数是0.643857i9 $\dot{2}$ 。



## 四、模块3 循环小数的加减法

### 铺垫2

1 计算： $0.\dot{3}2 + 0.4\dot{1} = \underline{\quad}$  .

A.  $0.\dot{7}\dot{3}$

B.  $0.7\dot{3}$

C. 0.73

答案 B

解析 列式相加即可.

2  $0.\dot{7}\dot{9} - 0.\dot{3} = ( \quad )$  .

A.  $0.\dot{4}\dot{6}$

B.  $0.\dot{4}\dot{7}$

C.  $0.\dot{4}\dot{8}$

D.  $0.\dot{4}\dot{9}$

答案 A

解析 列竖式可得结果为 $0.\dot{4}\dot{6}$  .

### 例题5

计算：

(1)  $0.\dot{1}2 + 0.\dot{3}1$

(2)  $0.\dot{6}7 + 0.\dot{5}8$

(3)  $0.\dot{1}2 + 0.\dot{4}3\dot{5}$

(4)  $0.\dot{3}4\dot{5} - 0.\dot{1}2$

答案 (1)  $0.\dot{4}3$

(2)  $1.\dot{2}\dot{6}$

(3)  $0.\dot{5}5\dot{6}$



(4)  $0.\dot{2}2413\dot{3}$

**解析** (1)  $0.\dot{4}\dot{3}$  .

(2)  $1.\dot{2}\dot{6}$  .

(3)  $0.5\dot{5}\dot{6}$  .

(4)  $0.\dot{2}2413\dot{3}$

【教学提示】循环小数加减法计算，一般可以直接用小数列竖式计算，计算结果不要求写成分数的，可以不用化成分数。

**随堂练**

计算：

(1)  $0.\dot{1} + 0.0\dot{1} + 0.00\dot{1} = \underline{\quad}$  .

(2)  $0.\dot{1} + 0.\dot{0}\dot{1} + 0.\dot{0}\dot{0}\dot{1} = \underline{\quad}$  .

**答案** (1)  $0.12\dot{3}$

(2)  $0.\dot{1}2221\dot{3}$

**解析** (1) 略

(2) 略

**捉虫时刻**

马马虎遇到了这么一道题：计算  $0.\dot{2}\dot{4} + 0.\dot{3}$ ，马马虎立马得出了答案： $0.\dot{5}\dot{4}$ 。但老师说马马虎的答案是错的。你知道马马虎哪错了吗？快来帮他改正吧！

**答案**  $0.\dot{5}\dot{7}$  .

**解析** 列竖式可得， $0.\dot{2}\dot{4} + 0.\dot{3} = 0.\dot{5}\dot{7}$  .

**挑战2**



算式： $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11}$  结果的小数点后第2025位数字是多少？

思考：

- (1) 哪些分数不会影响到小数点后第2025位数字？还剩下哪些分数？
- (2) 剩下的几个分数怎么求和？结合今天所学知识试一试吧！
- (3) 求出结果的小数点后第2025位数字。

**答案** (1)  $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{1}{8}$ 、 $\frac{1}{10}$ 、 $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$  七个分数；还剩  $\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}$  三个分数  
 (2) 转化为循环小数进行求和，和为  $0.\dot{3}4487\dot{7}$   
 (3) 4

**解析**  $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{1}{8}$ 、 $\frac{1}{10}$ 、 $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$  这些分数均可化为有限小数，不影响小数点后第2025位，剩下的分数转化为循环小数： $\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} = 0.14285\dot{7} + 0.11111\dot{1} + 0.09090\dot{9} = 0.\dot{3}4487\dot{7}$ ，所以第2025位数字是4。

### 补充

1 计算：

- (1)  $0.3 + 0.\dot{3}$  .
- (2)  $0.6\dot{9} - 0.0\dot{3}$  .
- (3)  $0.\dot{1} + 0.\dot{2} + 0.\dot{3} + 0.\dot{4} + 0.\dot{5}$  .

**答案** (1)  $0.6\dot{3} = \frac{19}{30}$  .  
 (2)  $0.6\dot{6}\dot{9} = \frac{221}{330}$  .  
 (3)  $1.\dot{6} = 1\frac{2}{3}$  .

**解析** (1)  $0.3 + 0.\dot{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{9} = \frac{19}{30}$  .  
 故答案为： $0.6\dot{3} = \frac{19}{30}$  .  
 (2)  $0.6\dot{9} - 0.0\dot{3} = \frac{63}{90} - \frac{3}{99} = \frac{221}{330}$  .  
 故答案为： $0.6\dot{6}\dot{9} = \frac{221}{330}$  .  
 (3)  $0.\dot{1} + 0.\dot{2} + 0.\dot{3} + 0.\dot{4} + 0.\dot{5} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{4}{9} + \frac{5}{9} = 1\frac{2}{3}$  .



故答案为： $1.\dot{6} = 1\frac{2}{3}$ 。

2 回答下列各题：

(1) 请将下列各组分数化成小数：

$$\begin{aligned} \text{① } \frac{1}{5} &= \underline{\quad\quad} ; \frac{3}{25} = \underline{\quad\quad} \\ \text{② } \frac{5}{9} &= \underline{\quad\quad} ; \frac{2}{11} = \underline{\quad\quad} \\ \text{③ } \frac{5}{6} &= \underline{\quad\quad} ; \frac{1}{12} = \underline{\quad\quad} \end{aligned}$$

(2) 判断下列各分数化成小数后，哪些是有限小数？哪些是纯循环小数？哪些是混循环小数？

$$\frac{7}{12}, \frac{14}{35}, \frac{173}{210}, \frac{180}{1001}$$

**答案** (1) ① 1:0.2

2:0.12

② 1:0. $\dot{5}$

2:0.i $\dot{8}$

③ 1:0.8 $\dot{3}$

2:0.08 $\dot{3}$

(2) 有限小数： $\frac{14}{35}$ ；纯循环小数： $\frac{180}{1001}$ ；混循环小数： $\frac{7}{12}$ ， $\frac{173}{210}$ 。

**解析** (1) ① 略

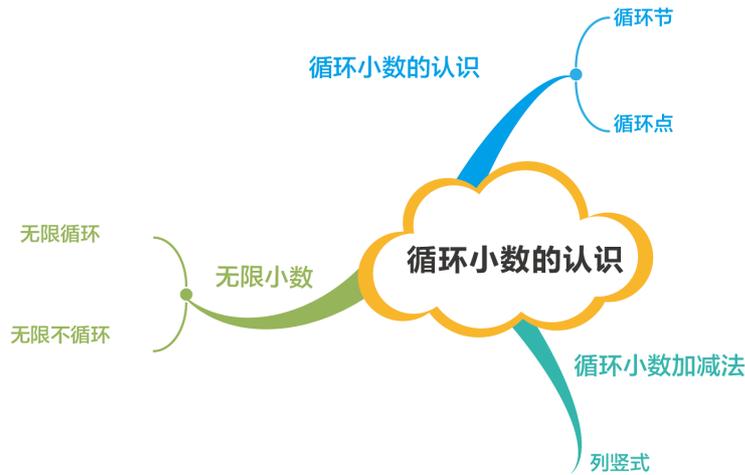
② 略

③ 略

(2) 略



思维导图



### 我是小讲师

亲爱的小朋友们，请给爸爸妈妈讲一讲  $\frac{a}{7}$  化成循环小数的规律吧！

答案 略

### 生活应用

艾迪薇儿历尽千辛万苦，找到了一个宝箱，但是宝箱却有个密码锁，并且附有纸条提示：宝箱的密码是个四位数，千位和百位分别是  $3 \div 7$  所得小数的小数点后第36位数字和第70位数字，后两位是  $3 \div 7$  所得小数的小数部分前20位之和，那么密码是 \_\_\_\_\_。

答案 1587

解析  $3 \div 7 = 0.428571$ ，六位一循环， $36 \div 6 = 6$ ， $70 \div 6 = 11 \dots 4$ ，所以36位和70位分别是1和5； $20 \div 6 = 3 \dots 2$ ，每个循环节所有数之和为27，所以前20位之和为  $27 \times 3 + 4 + 2 = 87$ 。  
故答案为：1587。

## 五、本讲巩固

1



计算： $0.4\dot{3} + 0.2\dot{5} = ( \quad )$

A.  $0.6\dot{8}$

B.  $0.68$

C.  $0.\dot{6}\dot{8}$

**答案** A

**解析** 列式相加即可.

2 下面各数中，最小的数是( ) .

A.  $3.\dot{2}4\dot{1}$

B.  $3.2\dot{4}$

C.  $3.\dot{2}\dot{4}$

D.  $3.2\dot{4}\dot{1}$

**答案** A

**解析**  $3.\dot{2}4\dot{1} \approx 3.2412$  ;  $3.2\dot{4} \approx 3.244$  ;  $3.\dot{2}\dot{4} \approx 3.242$  ;  $3.2\dot{4}\dot{1} \approx 3.2414$  .

3  $2 \div 7$  所得的小数，小数点后的第365位数字是 \_\_\_\_\_ ；这365位的数字之和为 \_\_\_\_\_ .

**答案** 1:1

2:1643

**解析**  $\frac{2}{7} = 0.\dot{2}8571\dot{4}$  , 6个一循环,  $365 \div 6 = 60 \dots \dots 5$  , 所以第365位是1 ; 和为  $27 \times 60 + 23 = 1643$

## 六、基础过关

1 2016年第14届全国小机灵杯小学高年级五年级竞赛初赛第4题

有一个循环小数 $0.2\dot{5}8\dot{7}$  . 它的小数部分第99位上的数字是 \_\_\_\_\_ .



**答案** 8

**解析**  $0.2\dot{5}8\dot{7}$  小数点后第1位是2； $(99 - 1) \div 3 = 32 \cdots \cdots 2$ ， $0.2\dot{5}8\dot{7}$  小数点后第99位是8。

2  $6 \div 7$  所得的小数，小数点后的第800位数字是 \_\_\_\_\_，这800位的数字之和为 \_\_\_\_\_。

**答案** 1:5

2:3604

**解析**  $\frac{6}{7} = 0.8\dot{5}714\dot{2}$ ， $800 \div 6 = 133 \cdots \cdots 2$ ，所以第800位数字为5，数字和为  $27 \times 133 + 13 = 3604$ 。

故答案为：5；3604。

3 2017~2018学年湖北武汉青山区五年级上学期期末第7题2分

把  $6.42\dot{3}$ 、 $6.4\dot{2}\dot{3}$ 、 $6.4\dot{2}\dot{3}$ 、 $6.\dot{4}2\dot{3}$  按从小到大的顺序排列：

\_\_\_\_\_ < \_\_\_\_\_ < \_\_\_\_\_ < \_\_\_\_\_

**答案** 1:  $6.42\dot{3}$

2:  $6.4\dot{2}\dot{3}$

3:  $6.4\dot{2}\dot{3}$

4:  $6.\dot{4}2\dot{3}$

**解析**  $6.42\dot{3} < 6.4\dot{2}\dot{3} < 6.4\dot{2}\dot{3} < 6.\dot{4}2\dot{3}$ 。

4 在小数  $1.80524102007$  上加两个循环点，能得到的最小的循环小数是 \_\_\_\_\_。（注：公元2007年10月24日北京时间18时05分，我国第一颗月球探测卫星“嫦娥一号”由“长征三号甲”运载火箭在西昌卫星发射中心升空，编写此题是为了纪念这个值得中国人民骄傲的时刻。）

**答案**  $1.80524102\dot{0}0\dot{7}$

**解析**



首先，末位必须点上循环点，其次，在最小数上点上循环点，应在第1个0上面点上循环点，即为 $1.80524102\dot{0}\dot{0}7$ 。

## 七、能力提升

1 真分数 $\frac{a}{7}$ 化为小数后，如果从小数点后第一位开始连续若干个数字之和为2017，则 $a =$  \_\_\_\_\_ 或 \_\_\_\_\_ 。

**答案** 1:3

2:4

**解析** 一个周期六位数不会变，和为 $1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7 = 27$ ， $2017 \div 27 = 74 \cdots 19$ ，  
 $19 = 4 + 2 + 8 + 5 = 5 + 7 + 1 + 4 + 2$ ，  
 $0.\dot{4}2857\dot{1} = \frac{3}{7}$ 或 $0.\dot{5}7142\dot{8} = \frac{4}{7}$ ，故 $a = 3$ 或 $4$ ，  
 故答案为：3或4。

2 划去小数0.201709011459中的7个数字，再给剩下的数字加上循环点，则该数最大为 \_\_\_\_\_ ，最小为 \_\_\_\_\_ 。

**答案** 1:0.9145 $\dot{9}$

2:0.0001 $\dot{1}$

**解析** 略。

3 计算。

$$0.\dot{4}\dot{3} + 0.\dot{5}\dot{2} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

$$1.\dot{1} + 4.\dot{2}\dot{3} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

$$0.\dot{3} + 0.\dot{7} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

$$0.\dot{8} - 0.\dot{2} = \underline{\hspace{2cm}} .$$



**答案** 1:0.95

2:5.34

3:1.1

4:0.6

**解析** 循环小数做加减法时，可以列竖式找规律。

## 八、创新挑战

计算：

(1)  $0.0\dot{1} + 0.2\dot{6} + 0.6\dot{2} = \underline{\hspace{2cm}}$  .

(2)  $0.1\dot{2}34\dot{5} + 0.2\dot{3}45\dot{1} + 0.3\dot{4}51\dot{2} + 0.4\dot{5}12\dot{3} + 0.5\dot{1}23\dot{4} = \underline{\hspace{2cm}}$  .

**答案** (1) 0.89

(2) 1.6

**解析** (1) 列竖式计算即可。

(2) 列竖式计算即可。





## 第2讲 相同的余数 B版

### 一、预习

#### 1. 课前热身

1 2018年广东广州海珠区六年级模拟考试第22题1分

把 $\frac{1}{11}$ 化为小数，小数点后第228位是( )。

- A. 0                      B. 1                      C. 9                      D. 2

答案 C

解析  $1 \div 11 = 0.09090909090909\dots\dots$ ，09循环。 $228 \div 2 = 114$ 也就是说正好有114个循环，所以第228位是9。

2 计算： $0.\dot{3} + 0.0\dot{3} + 0.00\dot{3} = ( )$ 。

- A.  $0.36\dot{9}$                       B.  $0.3\dot{6}9$                       C.  $0.\dot{3}69$                       D.  $0.\dot{3}69\dot{9}$

答案 A

解析 直接使用列竖式的方法，结果为 $0.36\dot{9}$ 。

3 在循环小数 $0.412125\dot{2}1$ 中移动第一个循环点，使新产生的循环小数尽可能小，循环小数改写为( )。

- A.  $0.4\dot{1}2125\dot{2}1$                       B.  $0.4121\dot{2}52\dot{1}$                       C.  $0.412\dot{1}252\dot{1}$                       D.  $0.\dot{4}12125\dot{2}1$

答案 A

解析 循环小数改写为 $0.4\dot{1}2125\dot{2}1$ 。



## 2. 知识GPS

### 本讲内容（抽象概括能力）

余数的性质，相同的余数

### 前铺知识

带余除法

### 后续知识

韩信点兵

**课内衔接：**因数与倍数

### 教学目标

掌握余数的可加、可减、可乘性；

掌握同余定理；

会应用同余定理解决问题；

### 教学重点

同余定理

### 教学难点

同余定理的应用

## 3. 板书设计

1. 余数的性质：可加、可减、可乘

2. 同余定理：如果 $a$ 、 $b$ 除以 $m$ 余数相同（均为整数，且 $m \neq 0$ ），则 $a - b$ 的差一定能被 $m$ 整除



3.同余定理的应用：已知被除数、余数，求除数。

(1) 余数相同，作差，求差的公因数；

(2) 余数不同，根据性质将余数化为相同，再作差。

注意：

(1) 余数小于除数；

(2) 余数可以为0时，除数可以为1。

## 4. 教学说明

模块一：余数性质的应用

【探索1】 余数的性质

【例1】 已知余数不同余数性质的应用

【例2】 已知余数相同余数性质的应用

模块二：同余定理及应用

【例3】 余数未知两个数的同余

【例4】 余数未知且余数相同情况下三个数同余

【例5】 余数未知且余数不同情况下三个数同余

【挑战1】 余数未知且余数成倍数情况下两个数的同余

【挑战2】 余数未知且余数成倍数情况下三个数的同余

## 5. 追本溯源

小朋友们，你们知道哪位数学家在同余问题上有着巨大的贡献吗？

提到高斯

我们可能会想到5050

想到正十七边形

想到他被称为数学王子

但今天我们要说的是

他在数论方面同样做出了卓越的贡献

单凭这方面的贡献



高斯就值得被我们永远铭记

数论 最古老的数学分支之一

主要研究整数的性质和整数之间的联系

早在古希腊时期毕达哥拉斯就注重发掘数的神秘关系

之后的欧几里得丢番图斐波那契费马欧拉都对数论进行了深入研究

但直到十九世纪之前

数论的研究处在一种无系统的状态之中

一些优秀的数学家也研究出了一些杰出得到结果

但这些结果都是零散、孤立的

拧不到一起去

1801年年仅24岁的高斯发表了数学史上的经典著作之一

《算术研究》

它的出版标志着数论研究进入了全新的时代

在这本著作中

有一个基本的研究课题——同余

虽然在这之前

欧拉、拉格朗日等人已经使用了这个概念“同余”

但用这个符号 ( $\equiv$ ) 表示同余并对它进行系统研究的却是高斯

并且

高斯还大大简化了数论中的许多问题

在这个基础之上

高斯把无限的整数划分为有限的种类

为数论研究指明了方向

在高斯的理论中

每一类中的所有数本质上是一样的

区分它们的关键就是余数

更重要的是

高斯引入了人为创造的抽象概念和对象

开启了数学研究新的篇章

今天

就让我们一起走进同余的世界

探究数的奥秘吧~

## 6. 课内链接

# 2 因数与倍数

## 1. 因数和倍数

**1** 在前面的学习中，我们见过下面的算式。

$12 \div 2 = 6$	$8 \div 3 = 2 \cdots \cdots 2$	$30 \div 6 = 5$
$19 \div 7 = 2 \cdots \cdots 5$	$9 \div 5 = 1.8$	$26 \div 8 = 3.25$
$20 \div 10 = 2$	$21 \div 21 = 1$	$63 \div 9 = 7$

你能把这些算式分类吗？

我们分成了这样的两类。

第一类	$12 \div 2 = 6$	$20 \div 10 = 2$	第二类	$8 \div 3 = 2 \cdots \cdots 2$	$9 \div 5 = 1.8$
	$30 \div 6 = 5$	$21 \div 21 = 1$		$19 \div 7 = 2 \cdots \cdots 5$	$26 \div 8 = 3.25$
	$63 \div 9 = 7$				

在整数除法中，如果商是整数而没有余数，我们就说被除数是除数的**倍数**，除数是被除数的**因数**。例如， $12 \div 2 = 6$ ，我们就说12是2的倍数，2是12的因数。 $12 \div 6 = 2$ ，所以12是6的倍数，6是12的因数。

说一说第一类的每个算式中，谁是谁的因数？谁是谁的倍数？

因数与倍数是相互依存的。

**注意：**为了方便，在研究因数和倍数的时候，我们所说的数指的是自然数（一般不包括0）。

## 二、模块1 余数性质的应用



**知识剖析**

余数的性质：

1. 可加性：若  $A \div m \dots a$  ,  $B \div m \dots b$  , 则  $(A + B) \div m \dots (a + b)$  ; ( 和的余数等于余数的和 )

2. 可减性：若  $A \div m \dots a$  ,  $B \div m \dots b$  , 则  $(A - B) \div m \dots (a - b)$  ; ( 差的余数等于余数的差 )

3. 可乘性：若  $A \div m \dots a$  ,  $B \div m \dots b$  , 则  $(A \times B) \div m \dots (a \times b)$  ; ( 积的余数等于余数的积 )

【教学提示】可加性、可减性、可乘性都可以用“带余除法”中的化除为乘证明。举例：可加性证明： $A \div m \dots a$  ,  $B \div m \dots b$  , 可设  $A = km + a$  ,  $B = lm + b$  (  $k$ 、 $l$  均为整数 ) , 则  $A + B = km + a + lm + b = (k + l)m + (a + b)$  , 故  $(A + B) \div m \dots (a + b)$  , 证毕。到这里四则运算只有除法没有涉及，这里要提示学生同余没有“可除性”。

**探索**

利用余数的性质计算。

( 1 )  $333 + 21$  除以 5 的余数。

- A. 3                      B. 2                      C. 4                      D. 1

( 2 )  $2247 - 617$  除以 9 的余数。

- A. 8                      B. 4                      C. 1                      D. 5

( 3 )  $58 \times 146$  除以 7 的余数。

- A. 12                      B. 2                      C. 6                      D. 5

**答案** ( 1 ) C

( 2 ) C

( 3 ) D

**解析** ( 1 )  $333 \div 5 \dots 3$  ,

$$21 \div 5 \dots 1 ,$$

$$(3 + 1) \div 5 \dots 4 ,$$



$$(333 + 21) \div 5 \dots\dots 4 .$$

(2)  $2247 \div 9 \dots\dots 6 ,$

$$617 \div 9 \dots\dots 5 ,$$

$$(6 - 5) \div 9 \dots\dots 1 ,$$

$$(2247 - 617) \div 9 \dots\dots 1 .$$

(3)  $58 \div 7 \dots\dots 2 ,$

$$146 \div 7 \dots\dots 6 ,$$

$$(2 \times 6) \div 7 \dots\dots 5 ,$$

$$(58 \times 146) \div 7 \dots\dots 5 .$$

**例题1**

按要求解答问题 .

(1) 某个整数除41, 余数是5, 那么这个整数可能是几?

(2) 某个整数除47余5, 除65余2, 那么这个整数最大是多少?

**答案**

(1) 6、9、12、18、36 .

(2) 21 .

**解析**

(1) 设这个整数为 $x$ , 则41和5对 $x$ 同余, 所以 $x|41 - 5 = 36$ , 但注意 $x > 5$ , 所以 $x = 6、9、12、18、36$  .

(2) 设这个整数为 $x$ , 则42, 63对 $x$ 同余:

$$\begin{cases} x|47 - 5 = 42 \\ x|65 - 2 = 63 \end{cases} \Rightarrow x|(42, 63) = 21, \text{ 注意 } x > 5, \text{ 所以 } x = 7, 21 ,$$

这个整数最大是21 .

**捉虫时刻**

艾迪学习完了今天的课程, 在回家做作业时, 遇到了这么一道题: 某个整数除43余7, 除74余2, 那么这个整数最小是多少? 他的计算过程如下:

解: 设这个整数为 $x$ , 则 $43 - 7 = 36$ 和 $74 - 2 = 72$ 除以 $x$ 余数相同, 由于 $(36, 72) = 36$ , 所以 $x$ 是36的因数,  $x = 1、2、3、4、6、9、12、18、36$ , 最小是1 .



但是老师说艾迪算错了，聪明的小朋友，你知道艾迪哪儿算错了吗？快来帮艾迪改正吧！

**答案** 艾迪没有注意到余数是有限制的，正确答案为9。

**解析** 设这个整数为 $x$ ，则 $43 - 7 = 36$ 和 $74 - 2 = 72$ 除以 $x$ 余数相同，由于 $(36, 72) = 36$ ，所以 $x$ 是36的因数，但需要注意 $x > 7$ ，所以 $x = 9、12、18、36$ ，最小值是9。

### 例题2

按求解答问题。

- (1) 某个整数除67、151得到的余数都是11，那么这个整数最小是多少？
- (2) 某个整数除61、109得到的余数都是13，那么这个整数可能是几？

**答案** (1) 14。

(2) 16、24、48

**解析** (1) 设这个整数为 $x$ ，则67，151，11对 $x$ 同余： $\begin{cases} x | 67 - 11 = 56 \\ x | 151 - 67 = 84 \end{cases} \Leftrightarrow x | (56, 84) = 28$ ，但注意 $x > 11$ ，所

以 $x = 14、28$ ，这个整数最小是14。

(2) 设这个整数为 $x$ ，则61，109，13对 $x$ 同余，

所以 $\begin{cases} x | 61 - 13 = 48 \\ x | 109 - 13 = 96 \end{cases} \Leftrightarrow x | (48, 96) = 48$ ，但注意 $x > 13$ ，所以 $x = 16、24、48$ 。

## 三、模块2 同余定理及应用

### 例题3

某个大于1的整数除29、17得到的余数相同，那么这个整数可能是几？

**答案** 2、3、4、6、12。

**解析** 这个整数设为 $x$ ，即 $29 \equiv 17 \pmod{x}$ ，



所以  $x | 29 - 17 = 12$  ,

所以  $x = 2、3、4、6、12$  .

 PK对战

1 某个大于1的整数除53、68得到的余数相同，那么这个整数最大可能是 \_\_\_\_\_ .

**答案** 15

**解析** 设这个整数是  $x$  , 则  $68 \equiv 53 \pmod{x}$  , 即  $x | 68 - 53 = 15$  ,  $15 = 3 \times 5$  , 则  $x = 3、5、15$  .

2 一个大于1的自然数除17、31的余数相同，这个自然数最大可能是 \_\_\_\_\_ .

**答案** 14

**解析** 设这个自然数是  $A$  , 则  $A | 31 - 17 = 14$  , 所以最大是14 .

3 120与102除以同一个数，得到的余数相同，但是余数不为0.这个除数最大为 \_\_\_\_\_ .

**答案** 18

**解析** 根据题意可知，它们相同的除数可以整除120与102的差，所以应为18的一个因数，则可以取1、2、3、6、9、18.由于不能是120或者102的因数，所以有9和18两种，所以除数最大为18 .

**例题4**

某个大于1的整数除17、53、113得到的余数相同，那么这个整数可能是几？

**答案** 2、3、4、6、12 .



**解析** 设这个整数为  $A$ ，则  $\begin{cases} 17 \div A \cdots a \\ 53 \div A \cdots a \\ 113 \div A \cdots a \end{cases}$ ，所以  $\begin{cases} (53 - 17) \div A \cdots 0 \\ (113 - 53) \div A \cdots 0 \end{cases}$ ，  
所以  $\begin{cases} A | 53 - 17 = 36 \\ A | 113 - 53 = 60 \end{cases}$ ，那么  $A | (36, 60) = 12$ ，所以  $A = 2, 3, 4, 6, 12$ 。

### 例题5

有3个吉利数888、518、666，用它们分别除以同一个自然数，所得的余数分别是  $a$ 、 $a + 7$ 、 $a + 10$ ，则这个自然数是多少？

**答案** 29。

**解析** 方法一：设这个数为  $x$ ，则888，511，656对  $x$  同余， $x$  是：888 - 656 = 232与656 - 511 = 145的公因数，且  $x$  大于10，所以  $x = 29$ 。

方法二：处理成余数相同的，则888、518 - 7、666 - 10的余数相同，这样我们可以转化成同余问题。这样我们用总结的知识点可知：任意两数的差肯定能被这个自然数整除。那么这个自然数是888 - 656 = 232的因数，也是656 - 511 = 145的因数，因此就是232、145的公因数，所以这个自然数是29。

故答案为：29。

### 挑战1

一个大于1的自然数除127、75所得的余数分别是  $2a$ 、 $a$ ，求这个自然数和  $a$  的值。（ $a \neq 0$ ）

**答案** 这个自然数为23， $a$ 的值6。

**解析**  $75 \times 2 = 150$  除以这个数的余数是  $2a$ ，127除以这个数的余数也是  $2a$ ，故同余。

将这两个数相减，得到  $150 - 127 = 23$ ，所求的自然数一定是23的因数，23的因数有23、1，所以这个自然数是23， $a = 6$ 。

### 挑战2

一个自然数除70、125、361所得的余数分别是  $a + 19$ 、 $a$ 、 $2a$ ，求这个自然数的值。



**答案** 37

**解析** 根据题意，自然数51，125被该自然数除所得的余数都是 $a$ ，所以这个数一定是 $125 - 51 = 74$ 的因数；由于250，361被该自然数除所得的余数都是 $2a$ ，所以这个数一定是 $361 - 250 = 111$ 的因数， $(74, 111) = 37$ ，所以这个数是37。  
故答案为：37。

**补充**

1 有一个自然数，分别去除63、90、130都有余数，并且三个余数之和为25，求最大那个余数是多少？

**答案** 20。

**解析** 设这个数为 $x$ ，则 $x|(63 + 90 + 130 - 25) \Rightarrow x|258$ ，而 $258 = 2 \times 3 \times 43$ ；  
显然 $x > \left\lfloor \frac{25}{3} \right\rfloor = 8$ 且 $x < 63$ ，即 $8 < x < 63$ ，推知 $x = 43$ 。  
经计算可知，最大的余数为 $63 \div 43 = 1 \cdots \cdots 20$ 。

2 一个自然数除30、45、79得到余数分别是 $a - 1$ 、 $a$ 、 $a^2$ ，那么这个自然数是几？（余数可以是零）。

**答案** 14或2。

**解析** 设自然数是 $x$ ，可知 $30 + 1 \equiv 45 \pmod{x}$ ，所以 $x|45 - 31 = 14$ ，当 $x = 14$ ，余数分别为2、3、9，符合；当 $x = 7$ ，此时余数分别为2、3、2，不符合，当 $x = 2$ ，余数分别为0、1、1，也符合。所以这个自然数可能是14或2。

3 已知60，154，200被某自然数除所得的余数分别是 $a - 1$ ， $a^2$ ， $a^3 - 1$ ，求该自然数的值。

A. 27

B. 29

C. 30

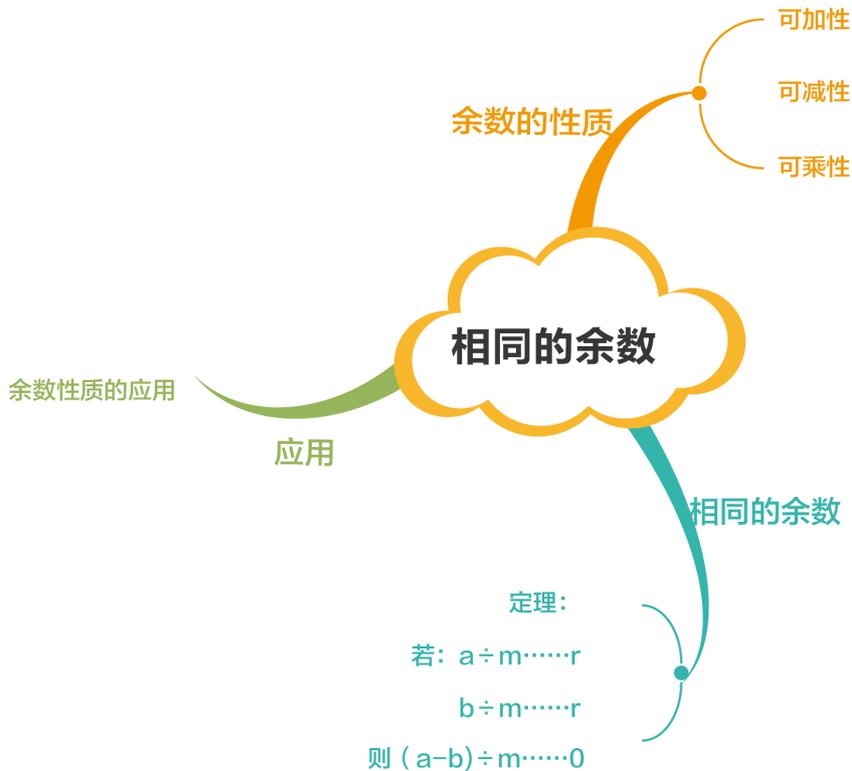
D. 31



**答案** B

**解析** 根据题意可知，自然数61，154，201被该数除所得余数分别是 $a$ ， $a^2$ ， $a^3$ 。由于 $a^2 = a \times a$ ，所以自然数 $61^2 = 3721$ 与154同余；由于 $a^3 = a \times a^2$ ，所以 $61 \times 154 = 9394$ 与201同余，所以除数是 $3721 - 154 = 3567$ 和 $9394 - 201 = 9193$ 的公因数，运用辗转相除法可得到 $(3567, 9193) = 29$ ，该除数为29。经检验成立。

**思维导图**



**我是小讲师**

请利用今天所学知识，给爸爸妈妈讲讲这道题吧！某个整数除72，余数是7，那么这个整数可能是几？

**答案** 13、65。

**解析** 设这个整数为 $x$ ，则72和7对 $x$ 同余，所以 $x|72 - 7 = 65$ ，但注意 $x > 7$ ，所以 $x = 13、65$ 。



生活应用

博士准备奖励给同学们一些积分卡，第一天他将222张积分卡分给班里的同学们，每人平均分一些以后还剩下6张；第二天博士又将309张积分卡分给班里的同学们，每人平均分一些以后还剩下3张。已知班级人数是两位数，求这个班有多少人？



**答案** 18 .

**解析** 设这个整数为  $x$ ，则216，306对  $x$  同余：

$$\begin{cases} x|222 - 6 = 216 \\ x|309 - 3 = 306 \end{cases} \rightarrow x|(216, 306) = 18 ,$$

注意  $x > 6$ ，所以  $x = 9, 18$ ，已知班级人数为两位数，所以这个班有18人。

## 四、本讲巩固

1 某个整数除58余4，除89余8，那么这个整数最小是 \_\_\_\_\_ .

**答案** 9

**解析** 设这个整数为  $x$ ，则54、81对  $x$  同余： $\begin{cases} x|(58 - 4) = 54 \\ x|(89 - 8) = 81 \end{cases} \rightarrow x|(54, 81) = 27$ ，注意  $x > 8$ ，所以

$x = 9, 27$ ，最小是9 .

2 某个大于1的整数除79、54得到的余数相同，那么这个整数最大是 \_\_\_\_\_ .



**答案** 25

**解析** 这个整数设为 $x$ ，则79和54对 $x$ 同余，所以 $x|(79 - 54) = 25$ ，所以 $x = 5、25$ ，所以最大是25。

3 三个数23、51、72，各除以同一个大于1的自然数后得到的余数相同，则这个除数是（  
）。

- A. 6                                      B. 7                                      C. 8                                      D. 9

**答案** B

**解析** 由题意，这个数能整除28和21（且大于1），故而是7。

## 五、基础过关

1 某个整数除229、337得到的余数都是13，这个整数最大是 \_\_\_\_\_，最小是 \_\_\_\_\_。

**答案** 1:108

2:18

**解析** 设这个整数为 $x$ ，即 $229 \equiv 337 \equiv 13 \pmod{x}$ ，

$$\text{所以} \begin{cases} x|337 - 229 = 108 \\ x|229 - 13 = 216 \end{cases} \rightarrow x|(108, 216) = 108,$$

但注意 $x > 13$ ，

所以 $x$ 最大为108，最小为18。

2 一个数除33、48、68，余数相同，请问这个数是 \_\_\_\_\_ 或 \_\_\_\_\_。（按从小到大填空）

**答案** 1:1

2:5

**解析** 设此数为 $x$ ， $\begin{cases} x|(48 - 33) \\ x|(68 - 48) \end{cases} \Rightarrow x|(15, 20) \Rightarrow x = 1, 5$ 。



设此数为 $x$ ，则 $x$ 应为 $48 - 33 = 15$ ， $68 - 48 = 20$ 的公因数，  
所以这个数是1或5。

3 一个数除50余1，除79余2，除89余5，请问这个数是\_\_\_\_\_。

答案 7

解析 设这个数为 $x$ ，则 $x$ 为 $50 - 1 = 49$ ， $79 - 2 = 77$ ， $89 - 5 = 84$ 的公因数且大于5，所以 $x = 7$ 。

4 用412、133、257除以一个相同的自然数，所得余数相同，这个数最大是\_\_\_\_\_。

答案 31

解析 设这个自然数是 $x$ ，则 $412 \equiv 133 \equiv 257 \pmod{x}$ 。

$$\text{即} \begin{cases} x|412 - 257 = 155 \\ x|257 - 133 = 124 \end{cases}, \text{也就是} x|(155, 124) = 31.$$

所以 $x$ 最大为31。

## 六、能力提升

1 一个大于1的数去除223，292，550时，得余数分别为 $a$ ， $a + 1$ ， $a + 4$ ，则这个自然数是\_\_\_\_\_。

答案 17

解析 根据题意可知，这个自然数去除223，291，546时，得到相同的余数（都为 $a$ ）。既然余数相同，我们可以利用余数定理，可知其中任意两数的差除以这个数肯定余0。那么这个自然数是 $291 - 223 = 68$ 的因数，又是 $546 - 291 = 255$ 的因数，因此就是68和255的公因数，因为68和255的公因数只有17和1，而这个数大于1，所以这个自然数是17。



2 用一个大于1的数去除111, 159, 183, 余数是 $a$ ,  $a - 3$ ,  $a + 4$ , 那么这个数是 \_\_\_\_\_ .

**答案** 17

**解析** 设这个数为 $N$ , 由题意, 用 $N$ 去除111, 162, 179的余数相同, 那么 $N$ 是 $(179 - 162, 162 - 111) = (17, 51) = 17$ 的因数, 由于 $N$ 大于1, 所以 $N$ 只能是17.

3 一个自然数除429、791、500所得的余数分别是 $a + 5$ 、 $2a$ 、 $a$ , 这个自然数是 \_\_\_\_\_ .

**答案** 19

**解析** 根据题意, 自然数424, 500被该自然数除所得的余数都是 $a$ , 所以这个数一定是 $500 - 424 = 76$ 的因数; 由于791, 1000被该自然数除所得的余数都是 $2a$ , 所以这个数一定是 $1000 - 791 = 209$ 的因数,  $(76, 209) = 19$ , 所以这个数是19.

## 七、创新挑战

一个大于1的数除291, 326, 346时, 得余数分别为 $2a$ ,  $3a$ ,  $a + 5$ , 则这个自然数是 \_\_\_\_\_ .

**答案** 17

**解析** 根据题意可知, 这个自然数去除 $291 \times 3 = 873$ ,  $326 \times 2 = 652$ ,  $(346 - 5) \times 6 = 2046$ 时, 得到相同的余数(都为 $6a$ ). 既然余数相同, 我们可以利用余数定理, 可知其中任意两数的差除以这个数肯定没有余数, 那么这个自然数是 $873 - 652 = 221$ 的因数, 又是 $2046 - 873 = 1173$ 的因数, 因此就是221和1173的公因数, 且大于1, 即17.



## 第3讲 分类枚举 B版

### 一、预习

#### 1. 课前热身

1 某个大于1的整数除15、5得到的余数相等，那么这个整数可能是几？

- A. 2                      B. 2, 5                      C. 2, 10                      D. 2, 5, 10

答案 D

解析 这个整数设为 $x$ ，即 $15 \equiv 5 \pmod{x}$ ，所以 $x | 15 - 5 = 10$ ，所以 $x = 2, 5, 10$ 。

2 某个大于1的整数除71、47得到的余数都是11，那么这个整数可能是几？

- A. 12                      B. 13                      C. 14                      D. 15

答案 A

解析 设自然数是 $x$ ，则 $x | 71 - 47 = 24$ ， $x | 47 - 11 = 36$ ，所以 $x | (24, 36) = 12$ ，因为 $x > 11$ ，所以 $x = 12$ 。

3 有一个大于1的整数，除45，59，101所得的余数相同，求这个数。

- A. 2                      B. 7                      C. 14                      D. 2、7、14

答案 D

解析 这个题没有告诉我们，这三个数除以这个数的余数分别是多少，但是由于所得的余数相同，根据同余定理，我们可以得到：这个数一定能整除这三个数中的任意两数的差，也就是说它是任意两数差的公约数。 $101 - 45 = 56$ ， $59 - 45 = 14$ ， $(56, 14) = 14$ ，14的约数有1、2、7、



14, 所以这个数可能为2、7、14.

## 2. 知识GPS

### 本讲内容 (数据处理)

整数分拆, 摸小球, 撕邮票

### 前铺知识

简单整数分拆, 树形图

### 后续知识

复杂的加乘原理

**课内衔接:** 数学广角——搭配(一)

数学广角——搭配(二)

### 教学目标

熟练掌握有序枚举的方法;

学会不同类型题目的不同分类方式: 由小到大, 由少到多

### 教学重点

按照由小到大或者由少到多进行分类枚举

### 教学难点

选择分类方法

有序枚举

## 3. 板书设计

枚举法:

分类有序, 不重不漏

## 4. 教学说明

**【探索1】** 探究简单的整数分拆问题

**【例1】** 不同约束条件下的整数分拆

**【例2】** 取数使和满足一定条件

【挑战】取数使和满足一定条件

【探索2】探究简单的摸小球问题

【例3】没有限定条件的摸小球

【例4】有限定条件的摸小球

【例5】撕邮票枚举

【挑战】田忌赛马问题

## 5. 追本溯源

小朋友们，你们知道数是怎么来的吗？

### 探索1

请大家试着把9个气球分成三堆，每堆至少两个，有多少种不同的分法？（不考虑顺序）



**答案** 3种 .

**解析**  $9 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3$ ，共3种 .

### 例题1

1 艾迪有10块糖，想分成三堆（不考虑堆顺序，且糖没有区别），每堆至少两块，有 \_\_\_\_\_ 种分法 .

**答案** 4

**解析** 最少一堆是2的话，可以是 $2 + 2 + 6$ 、 $2 + 3 + 5$ 、 $2 + 4 + 4$ ；最少一堆是3的话是 $3 + 3 + 4$ ，一共4种 .



2 薇儿有10块糖，如果每天至少吃3块，那么共有 \_\_\_\_\_ 种不同的吃法吃完这10块糖。

**答案** 9

**解析** 首先分类，一天吃完的话，可以一次吃10块；两天吃完的话，可以是3 + 7、4 + 6、5 + 5、6 + 4、7 + 3；三天吃完的话，可以是3 + 3 + 4、3 + 4 + 3、4 + 3 + 3，总共9种。

### 捉虫时刻

将15个小球分成三堆，每堆至少3个，共有多少种不同的方法？马小虎的解题过程如下，他做的对吗？请你帮他挑挑错吧！

$15 = 3 + 4 + 8 = 3 + 5 + 7 = 4 + 5 + 6$ ，共3种。

**答案** 7种

**解析** 题目中没有说每堆数量互不相同，所以每一堆小球的数量是可以相同的。

$15 = 3 + 3 + 9 = 3 + 4 + 8 = 3 + 5 + 7 = 3 + 6 + 6 = 4 + 4 + 7 = 4 + 5 + 6 = 5 + 5 + 5$ ，共7种。

### 例题2

计算：

- (1) 从1~20中取两个不同的整数相加，和等于20，有多少种取法？
- (2) 从1~20中取两个整数相加（可以相同），和大于20，有多少种取法？
- (3) 从1~20中取两个不同的整数相加，和大于20，有多少种取法？

**答案** (1) 9种。

(2) 110种。

(3) 100种。

**解析** (1) 两个数之和等于20，枚举：1 + 19、2 + 18、……、9 + 11，一共9种。



- (2) 两个数之和大于20的话, 先由小到大固定第一个数, 然后就可以找到每一种情况下和大于20的所有情况, 由于 $1 + 20$ 与 $20 + 1$ 是一样的, 所以第二个数要大于等于第一个数. 1可以和20相加; 2可以和20、19相加、……、10可以和11~20相加、11可以和11~20相加、12可以和12~20相加、……、20可以和20相加, 总共
- $$1 + 2 + \dots + 9 + 10 + 10 + 9 + \dots + 1 = 110 \text{ (种)} .$$
- (3) 两个数不同的话, 把上题里 $11 + 11$ 到 $20 + 20$ 都去掉, 一共去掉10种, 还剩100种.

随堂练

盘子里一共有20颗花生, 艾迪和薇儿一起吃, 每人一口吃2颗, 两个人一起把花生吃完(每人至少吃一口), 两个人吃的颗数有( )种可能.

- A. 5                      B. 6                      C. 9                      D. 11

答案 C

解析 他们吃花生的所有情况如下表:

艾迪	2	4	6	8	10	12	14	16	18
薇儿	18	16	14	12	10	8	6	4	2

所以, 两个人吃的颗数有9种可能.

故选C.

【教学提示】艾迪吃2颗, 薇儿吃18颗与艾迪吃18颗, 薇儿吃2颗是两种不同的吃法, 这与将20拆成两个数相加是不一样的.

挑战1

从1~50这50个自然数中选取两个不同的数, 使它们的和大于50, 共有 \_\_\_\_\_ 种不同的取法.

答案 625

解析



两个数之和大于50的话，先由小到大固定第一个数，然后就可以找到每一种情况下和大于50的所有情况，由于 $1 + 50$ 与 $50 + 1$ 是一样的，所以第二个数要大于等于第一个数。

第一个数取1时，第二个数可以取50，共1个数；

第一个数取2时，第二个数可以取49、50，共2个数；

第一个数取3时，第二个数可以取48、49、50，共3个数；

.....

第一个数取24时，第二个数可以取27至50，共24个数；

第一个数取25时，第二个数可以取26至50，共25个数；

第一个数取26时，第二个数可以取27至50，共24个数；

.....

第一个数取49时，第二个数可以取50，共1个数；

$1 + 2 + \dots + 25 + \dots + 2 + 1 = 625$ 种。

### 探索2

袋中有5个红球和6个绿球，艾迪从中任意拿出5个球，共有 \_\_\_\_\_ 种不同的取法。

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

答案 C

解析 列表枚举，拿出5个球的情况共有6种。

红球	绿球
5	0
4	1
3	2
2	3
1	4
0	5

故选C。



**例题3**

袋中有3个红球，4个黄球和5个白球，艾迪从中任意拿出6个球，共有 \_\_\_\_\_ 种不同的取法。

**答案** 18

**解析** 红球可以取3个，2个，1个和0个，共四种取法；黄球可以取4个，3个，2个，1个和0个，共五种取法；白球可以取5个，4个，3个，2个，1个和0个，共六种取法，按照情况最少的红球进行分类列表枚举，拿出6个球的情况共有18种。

红球	黄球	白球									
3	0	3	2	0	4	1	0	5	0	1	5
	1	2		1	3		1	4		2	4
	2	1		2	2		2	3		3	3
	3	0		3	1		3	2		4	2
				4	0		4	1			

**例题4**

口袋中有20个球，其中白球9个，红球5个，黑球6个。现从中任取10个球，使得剩下的白球不少于3个但不多于8个，红球不少于2个，黑球不多于3个。共有 \_\_\_\_\_ 种不同的取法。

**答案** 15

**解析** 原来共有20个球，取出了10个球，因此剩下10个球，在剩下的10个球中，白球不少于3个但不多于8个，红球不少于2个，黑球不多于3个，现在以黑球为标准展开分类枚举：

- ①当剩下0个黑球时：剩下的白球和红球一共10个，所以符合要求的剩余白球和红球的组合有 (5, 5) (6, 4) (7, 3) (8, 2) 4种；
- ②当剩下1个黑球时：剩下的白球和红球一共9个，所以符合要求的剩余白球和红球的组合有 (4, 5) (5, 4) (6, 3) (7, 2) 4种；



③当剩下2个黑球时：剩下的白球和红球一共8个，所以符合要求的剩余白球和红球的组合有  $(3, 5)$   $(4, 4)$   $(5, 3)$   $(6, 2)$  4种；

④当剩下3个黑球时：剩下的白球和红球一共7个，所以符合要求的剩余白球和红球的组合有  $(3, 4)$   $(4, 3)$   $(5, 2)$  3种。

所以，一共有15种取法。

课堂互动 (pk对战)

1 将7个小球分成3堆，每堆至少1个，共有 \_\_\_\_\_ 种分法。

- A. 3                      B. 4                      C. 5                      D. 7

**答案** B

**解析** 4种。

2 袋中有3个红球和8个黄球，薇儿从中任意拿出7个球，共有 \_\_\_\_\_ 种不同的取法。

- A. 3                      B. 4                      C. 5                      D. 6

**答案** B

**解析** 列表枚举，拿出7个球的情况共有4种。

红球	黄球
3	4
2	5
1	6
0	7

故选B。

3 有1张5元币，3张2元币，5张1元币。要拿出8元钱可以有 \_\_\_\_\_ 种不同的拿法。

- A. 8                      B. 6                      C. 5                      D. 4

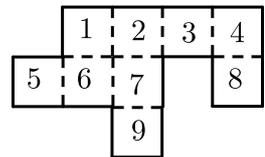


答案 D

解析  $5+2+1=8$  ;  $5+1+1+1=8$  ;  $2+2+2+1+1=8$  ;  $2+2+1+1+1+1=6$  ; 共4种.

例题5

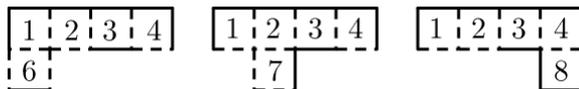
艾迪到邮局购买5张邮票，并要求这些邮票的式样都要相同且全部都要互相连接在一起（两张邮票之间只有顶点与顶点相连不算连在一起）。现在邮局只剩最后的9张邮票，如下图所示，为满足艾迪的要求，请问邮局的职员有 \_\_\_\_\_ 种不同的撕邮票的方法。



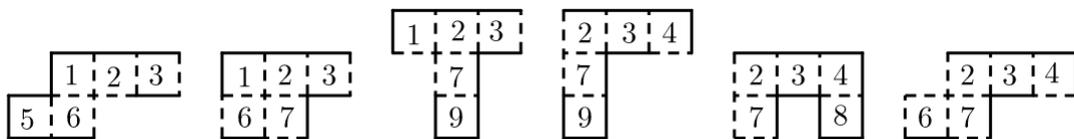
答案 15

解析 根据题意我们可以把邮票从上到下分成三层考虑，并标上相应数字，按第一层所含邮票个数由多到少分类枚举

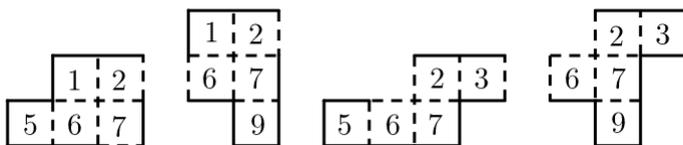
第一层4张邮票的：



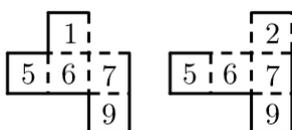
第一层3张邮票的：



第一层2张邮票的：



第一层1张邮票的：





共有  $3 + 6 + 4 + 2 = 15$  (种) .

### 挑战2

一次，齐王与大将田忌赛马，每人有四匹马，分为四等。田忌知道齐王这次比赛马的出场顺序依次为一等、二等、三等、四等，而且还知道这八匹马跑的最快的是齐王的一等马，接着依次为自己的一等，齐王的二等，自己的二等，齐王的三等，自己的三等，齐王的四等，自己的四等。田忌有多少种方法安排自己的马的出场顺序，保证自己至少能赢两场比赛？

**答案** 12种 .

**解析** 用一个四位数表示田忌的马的出场顺序。按照顺序枚举出所有方法：1423、2143、2413、3124、3142、3412、3421、4123、4132、4213、4312、4321 .

### 补充

1 有1, 2, 3, 4四张数字卡片，要求数字“1”不排在千位上，数字“2”不排在百位上，数字“3”不排在十位上，数字“4”不排在个位上，那么这四张卡片组成满足要求的四位数共有多少个？

**答案** 2143, 2341, 2413, 3142, 3421, 3412, 4123, 4321, 4312

**解析** 用列举法共9个：2143, 2341, 2413, 3142, 3421, 3412, 4123, 4321, 4312 .

2 小明用25元钱买了甲、乙、丙、丁4种书，共10本。已知甲、乙、丙、丁这4种书每本价格分别为1元、2元、3元、4元，而且每种书至少买了一本。那么，共有多少种不同的购买方法？

**答案** 8种 .

**解析**



去掉每种各1本后，剩下6本共计15元，如果又买了0本1元的，那么只能是222333、222234这两种买法；如果又买了1本1元的，剩下5本14元，可以是23333、22334、22244这三种。如果买了2本1元的，剩下4本13元，可以是2344、3334两种；如果买3本1元的，剩下3本12元，只能是444。所以一共有8种。

3 在所有的两位数中，十位数字比个位数字大的两位数有 \_\_\_\_\_ 个。

**答案** 45

**解析** 将符合要求的两位数按照首位数字进行分类枚举：

10

20、21

30、31、32

40、41、42、43

.....

90、91、92、93、94、95、96、97、98

共有  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$  个。

 思维导图



我是小讲师

袋中有2个红球，3个黄球和4个白球，艾迪从中任意拿出4个球，共有多少种不同的取法？你是按照什么进行分类的，又是怎样枚举的？快说说你的想法吧！

答案 11 .

解析 列表枚举，拿出4个球的情况共有11种 .

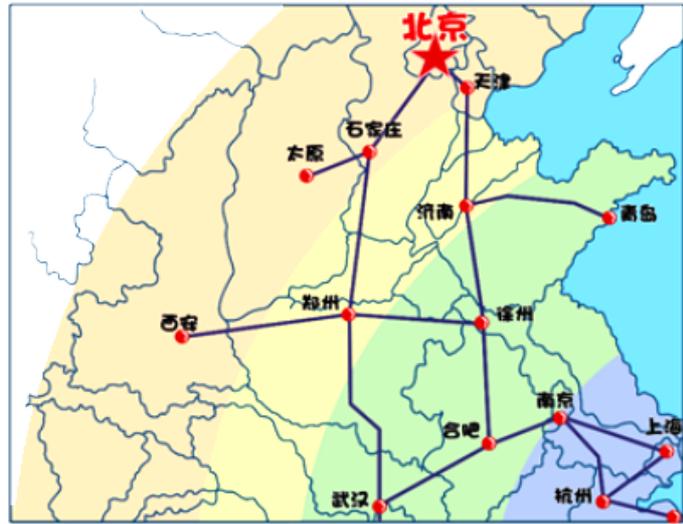
红球	黄球	白球	红球	黄球	白球	红球	黄球	白球
2	0	2	1	0	3	0	0	4
	1	1		1	2		1	3
	2	0		2	1		2	2
				3	0		3	1

生活应用

由于经济的发展，人们生活水平提高，开始追求精神方面的享受，促进了许多产业的发展。一个典型的例子就是旅游业。而旅游业的发展促进了电子地图的成长。一些比较先进



的电子地图可以罗列出从起始点到终点的所有路线。下图是中国火车路线图的一部分。如果你现在是一款电子地图的研发者，一个顾客想要从北京到上海，并且中途不重复经过相同的地方。



- (1) 请你帮他罗列出所有路线，并说一说你是按照什么样的分类方法来找这些路线的。
- (2) 为什么有时候人们会不走地图上的最短路线？

**答案**

(1) 由于合肥是北京到上海的必经之路，所以可将路线分为两段考虑：

第一段：从北京到合肥有以下四条：北京——徐州——合肥

北京——郑州——徐州——合肥

北京——徐州——郑州——武汉——合肥

北京——郑州——武汉——合肥

第二段：从合肥到上海有两条：合肥——南京——上海

合肥——南京——杭州——上海

共  $4 \times 2 = 8$  条。鼓励学生有其他的分类方法。

- (2) ①旅客可能要中途去别的地方办事或者游玩，②有的最短路线需要多换乘反而麻烦，③某条路线人员多可能不好买票，④某条路线发车时间过早或者过晚，不合适（理由合理即可）

**解析**

(1) 略。

(2) 略。



## 二、本讲巩固

1 从1~8这8个正整数中，每次取出两个不同的数，使它们的和是4的倍数，共有 \_\_\_\_\_ 种不同的取法。

**答案** 6

**解析** 取出两个不同的数，和是4的倍数，只可能是4、8、12： $4 = 1 + 3$ ， $8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5$ ， $12 = 4 + 8 = 5 + 7$ ，共6种。

2 袋中有2个黄球，3个红球和3个白球，从中任意拿出5个球，共有 \_\_\_\_\_ 种不同的取法。

**答案** 9

**解析** 黄球可以取2个，1个和0个，按照黄球进行分类列表枚举，拿出5个球的情况共有9种。

黄球	红球	白球	黄球	红球	白球	黄球	红球	白球
2	0	3	1	1	3	0	2	3
	1	2		2	2		3	2
	2	1		3	1			
	3	0						

3 艾迪、薇儿、大宽三个人一共有7本相同的课外书，每个人至少有一本。三个人拥有的本数有 \_\_\_\_\_ 种可能。

**答案** 15

**解析** 如下表所示，共有15种可能。



艾迪课外书数量	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5
薇儿课外书数量	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	3	1	2	1
大宽课外书数量	5	4	3	2	1	4	3	2	1	3	2	1	2	1	1

### 三、基础过关

1 用1至8这八个自然数中的四个组成四位数，从个位到千位的数字依次增大，且任意两个数字的差都不是1，这样的四位数共有 \_\_\_\_\_ 个.

**答案** 5

**解析** 有序枚举：8642，8641，8631，8531，7531，共5个.

2 15个球分成数量不同的四堆，共有 \_\_\_\_\_ 种分法.

**答案** 6

**解析**  $15 = 1 + 2 + 3 + 9 = 1 + 2 + 4 + 8 = 1 + 2 + 5 + 7 = 1 + 3 + 4 + 7 = 1 + 3 + 5 + 6 = 2 + 3 + 4 + 6$ ，共有6种分法.  
故答案为：6.

3 袋中有5个红球，3个黄球和7个白球，艾迪从中任意拿出5个球，共有 \_\_\_\_\_ 种不同的取法.

**答案** 18

**解析** 按照情况数最少的黄球进行分类列表枚举，拿出5个球的情况共有18种.



黄球	红球	白球									
3	0	2	2	0	3	1	0	4	0	0	5
	1	1		1	2		1	3		1	4
	2	0		2	1		2	2		2	3
				3	0		3	1		3	2
							4	0		4	1
										5	0

4 现有2张5元、4张2元，8张1元的人民币，从中拿出12元，有 \_\_\_\_\_ 种拿法。

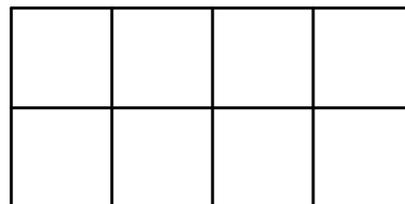
**答案** 9

**解析** 枚举过程如下图所示，总共是  $2 + 4 + 3 = 9$  种方法。

5元 (2张)	2元 (4张)	1元 (8张)	种类
2	1, 0	0, 2	2种
1	3, 2, 1, 0	1, 3, 5, 7	4种
0	4, 3, 2	4, 6, 8	3种

## 四、能力提升

1 薇儿到邮局购买4张邮票，并要求这些邮票的式样都要相同且全部都要互相连接在一起（两张邮票之间只有顶点与顶点相连不算连在一起）。现在邮局只剩最后的7张邮票，如下图所示。为满足薇儿的要求，请问邮局的职员有 \_\_\_\_\_ 种不同的撕邮票的方法。



**答案** 7



**解析** 把邮票编号，并分成上下两层考虑：

①如果第一层有4张邮票，有1种选择：2457。

②如果第一层有3张邮票，有4种选择：1245、2345、3457、4567。

③如果第一层有2张邮票，有2种选择：1234、1345。

所以一共有  $1 + 4 + 2 = 7$  种不同方法。

2	4	5	7
1	3		6

**2** 由1、2、3、4这四个数字可以组成许多无重复数字的四位数，将它们从小到大依次排序，那么4123应排在第 \_\_\_\_\_ 个。

**答案** 19

**解析** 1做千位：1234、1243、1324、1342、1423、1432，有6个；那么2做千位和3做千位也分别有6个数，4做千位的第一个数就是4123，排在第  $6 + 6 + 6 + 1 = 19$  个。

**3** 有长度分别是1、2、3、4、5、6、7、8、9、10的小棒各一根，从中选出几根小棒摆出边长是10的正方形，有 \_\_\_\_\_ 种选法。

**答案** 7

**解析** 正方形的四个边可以分为两类：

含有10的为一类：有  $10 = 9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3$ ， $10 = 9 + 1 = 8 + 2 = 6 + 4$ ，

$10 = 9 + 1 = 7 + 3 = 6 + 4$ ， $10 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4$ ， $10 = 9 + 1 = 6 + 4 = 5 + 3 + 2$ ，

$10 = 8 + 2 = 7 + 3 = 5 + 4 + 1$ ；

不含有10的为一类：有  $9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4$ 。共7种。



## 五、创新挑战

2007的数字和是9，问：大于2000小于3000的四位数中数字和等于9的数共有 \_\_\_\_\_ 个.

**答案** 36

**解析** 大于2000小于3000的四位数千位数字是2，则其余三位数字和是7，因为，百位数字至多是7，

于是根据百位数进行分类：

第一类，百位为7时，只有2700一个；

第二类，百位为6时，只有2610，2601两个；

第三类，百位为5时，只有2520，2511，2502三个；

第四类，百位为4时，只有2430，2421，2412，2403四个；

第五类，百位为3时，只有2340，2331，2322，2313，2304五个；

第六类，百位为2时，只有2250，2241，2232，2223，2214，2205六个；

第七类，百位为1时，只有2160，2151，2142，2133，2124，2115，2106七个；

第八类，百位为0时，只有2070，2061，2052，2043，2034，2025，2016，2007八个；

根据加法原理，总计  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$  个 .



## 2020五秋1~3讲阶段复习 B版

1 把  $\frac{15}{7}$  化成小数，小数部分第100位上的数字是 \_\_\_\_\_ .

答案 8

解析 把  $\frac{15}{7}$  化成小数，小数部分第100位上的数字是8 .

2 计算： $0.\dot{3}\dot{2} + 0.4\dot{1} =$  \_\_\_\_\_ .

答案  $0.7\dot{3}$

解析 列式相加即可 .

3 判断：

1.  $1.\dot{1} - 0.\dot{5} = 0.\dot{5}\dot{6}$  . ( )

答案 F

解析 方法一：没有  $0.\dot{5}\dot{6}$  这种写法，只能写成分数再计算： $1.\dot{1} - 0.\dot{5} = \frac{10}{9} - \frac{5}{9} = \frac{5}{9}$  .

方法二：直接列竖式计算可得： $1.\dot{1} - 0.\dot{5} = 0.\dot{5}$  .

4 某个整数除67、151得到的余数都是25，那么这个整数最大可能是 \_\_\_\_\_ .

答案 42

解析 设这个自然数是  $x$ ，则  $151 \equiv 67 \equiv 25 \pmod{x}$  .

即  $\begin{cases} x|151 - 67 = 84 \\ x|67 - 25 = 42 \end{cases}$ ，即  $x|(42, 84) = 42$  .



5 有一个大于10的整数，除22，50，78所得的余数相同，这个数最小为\_\_\_\_\_。

**答案** 14

**解析** 这个题没有告诉我们，22，50，78除以这个数的余数分别是多少，但是由于所得的余数相同，

根据同余定理，我们可以得到：这个数一定能整除这三个数中的任意两数的差，也就是说它是任意两数差的公约数。

$50 - 22 = 28$ ， $78 - 50 = 28$ ， $(28, 28) = 28$ ，28的约数有1、2、4、7、14、28，所以这个大于10的整数最小可能为14。

6 一个大于1的整数去除290，235，200时，得余数分别为 $a$ ， $a + 2$ ， $a + 5$ ，则这个整数是\_\_\_\_\_。

**答案** 19

**解析** 方法一：设这个整数为 $x$ ，根据题意可知， $x$ 除290、 $235 - 2 = 233$ 、 $200 - 5 = 195$ 的余数都是 $a$ 。

$$\text{则有 } 290 \equiv 233 \equiv 195 \pmod{x}, \text{ 即 } \begin{cases} x | 290 - 233 = 57 \\ x | 233 - 195 = 38 \end{cases}$$

$$\text{即 } x | (38, 57) = 19.$$

方法二：设这个数为 $x$ ，则有

$$290 \div x = \square \cdots \cdots a$$

$$235 \div x = \square \cdots \cdots a + 2$$

$$200 \div x = \square \cdots \cdots a + 5$$

可以转化为：

$$290 \div x = \square \cdots \cdots a$$

$$233 \div x = \square \cdots \cdots a$$

$$195 \div x = \square \cdots \cdots a$$

即有 $290 \equiv 233 \pmod{x} \equiv 195 \pmod{x}$ ，根据同余性质，可知 $x$ 为它们两两差的约数，又

$$290 - 233 = 57, 290 - 195 = 95, 233 - 195 = 38, (38, 57, 95) = 19, \text{ 所以这个自然数为 } 19.$$



7 将12块糖分数量不同的3堆，每堆至少一个，共有 \_\_\_\_\_ 种不同的分法.

答案 7

解析  $12 = 1 + 2 + 9 = 1 + 3 + 8 = 1 + 4 + 7 = 1 + 5 + 6 = 2 + 3 + 7 = 2 + 4 + 6 = 3 + 4 + 5$

8 将14个一样的小球装到3个相同的袋子里，要求每个袋子里至少有3个小球，一共有 \_\_\_\_\_ 种装法 .

答案 5

解析 无序分拆枚举：

最少者	3			4	
中间者	3	4	5	4	5
最多者	8	7	6	6	5

可知有5种分法 .

9 小明有多张面额为1元、2元和5元的人民币，他想用其中不多于10张的人民币购买一只价格为18元的风筝，要求至少用两种面额的人民币，那么不同的付款方式有 ( ) 种 .

A. 3

B. 9

C. 11

D. 8

答案 C

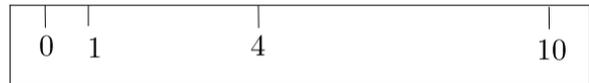
解析



5元	2元	1元	总张数
3	0	3	6
3	1	1	5
2	4	0	6
2	3	2	7
2	2	4	8
2	1	6	9
2	0	8	10
1	6	1	8
1	5	3	9
1	4	5	10
0	8	2	10

共11种。

- 10 把一把磨损严重的直尺，上面的大部分刻度已经看不清了，能看清的只有以下四个刻度，（如图，单位：厘米）。



那么，用这把直尺能直接一次性量出（ ）个不同的长度。

- A. 3                      B. 4                      C. 5                      D. 6

**答案** D

**解析** 1厘米，4厘米，10厘米，3厘米，6厘米，9厘米，共6个。

故选D。

## 第4讲 染色与覆盖 B版

### 一、预习

#### 1. 课前热身

- 1 将9个苹果分成三堆，每堆至少有1个苹果，一共有多少种分法？（ ）
- A. 6种                      B. 7种                      C. 8种                      D. 9种

答案 B

解析 7种

- 2 艾迪用若干张1元、5元、10元的人民币（每种钱都够用）去买一个20元的水杯，请问艾迪一共有（ ）种不同的付款方式
- A. 6                      B. 7                      C. 8                      D. 9

答案 D

解析 按照币值从大到小的顺序列表枚举，共9种，见下表：



10元	5元	1元	凑20元
2	0	0	$10 \times 2 = 20$
1	2	0	$10 \times 1 + 5 \times 2 = 20$
1	1	5	$10 \times 1 + 5 \times 1 + 1 \times 5 = 20$
1	0	10	$10 \times 1 + 1 \times 10 = 20$
0	4	0	$5 \times 4 = 20$
0	3	5	$5 \times 3 + 1 \times 5 = 20$
0	2	10	$5 \times 2 + 1 \times 10 = 20$
0	1	15	$5 \times 1 + 1 \times 15 = 20$
0	0	20	$1 \times 20 = 20$

**3** 2014年四川成都小升初七中嘉祥外国语学校第29题

每次从3、4、5、10、12、26中任取两个数，一个做分子，一个做分母，可以组成很多不同的分数，其中最简真分数的有（ ）个。

- A. 5                      B. 6                      C. 7                      D. 8

**答案** C

**解析** 要求为最简真分数，所以分子从最小的开始选。当分子是3的时候有4个；当分子是4的时候有1个；当分子是5的时候有2个。所以一共有7个这样的最简真分数。答案选C。

## 2. 知识GPS

### 本讲内容（创新思维能力）

覆盖问题，认识黑白染色，黑白染色的应用

### 前铺知识

奇偶性问题

### 后续知识

抽屉原理



**课内衔接：**奇数与偶数

### 教学目标

理解国际象棋棋盘的基本构造；  
掌握对方格图、点线图进行黑白相间染色的方法；  
运用黑白相间染色解决生活中的实际问题。

### 教学重点

奇偶性知识在黑白相间染色证明中的运用；  
论证过程的书写。

### 教学难点

将方格图中的问题抽象成染色问题的思考逻辑

## 3. 板书设计

1. 棋盘染色（黑白间隔染色法）：

覆盖问题

路径问题

2. 黑白染色问题的解决方法：

黑白间隔染色；

奇偶性判断是否可行；

若不行，说明原因；若可行，构造出可能的情况。

注意：黑白染色只能论证“不能”，即用来证否。若黑白染色的方法判断可行，需要找出可行的方案才能说明“能”。

## 4. 教学说明

模块一：覆盖问题

【探索1】国际象棋棋盘的认识

【例1】 $1 \times 2$ 长方形覆盖问题——引出黑白相间染色

【例2】 $1 \times 2$ 长方形覆盖问题



【例3】黑白相间染色在覆盖问题中的运用

【挑战1】其他形状覆盖问题

模块二：路径问题

【探索2】认识所走步数与到达颜色之间的关系

【例4】格子图中的遍历问题

【例5】点线图中的环游问题

【挑战2】非相邻走位的遍历问题

## 5. 追本溯源

小朋友们，你们知道国际象棋的来历吗？

**答案** 顾名思义，国际象棋是棋类的一种，有一个传说，大约2000年前的古印度，一个国王非常喜欢打仗，经常到处征战，弄得民不聊生，有一个大臣苦苦思索让百姓安居乐业的方法，终于发明了一种游戏，在木头做的棋盘上，用黑白棋子代表两支军队进行战斗，国王很快就喜欢上了这个游戏，同时也从中悟出一个道理，国王不是孤立的，而是需要臣民的辅佐和保护，于是国王慢慢做出改变，也开始受到臣民的爱戴，而这个游戏，经过长时间的发展，就成了我们今天的国际象棋。

## 二、模块1 覆盖问题

### 知识剖析

一、棋盘中的数学主要是通过利用染色技巧，结合数论知识（奇偶性等），进行推理回答“能”或“不能”的问题。其中最常见的是黑白染色问题。

二、黑白染色问题的解决方法：

1. 黑白间隔染色；
2. 奇偶性判断是否可行；
3. 若不行，说明原因；若可行，构造出可能的情况。



注意：黑白染色只能论证“不能”，即用来证否. 若黑白染色的方法判断可行，需要找出可行的方案才能说明“能”.

铺垫1

棋盘的黑白相间染色是指：

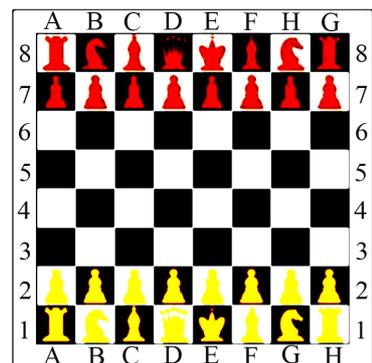
- A. 从中间将棋盘平分，一边涂黑色，一边涂白色
- B. 将棋盘的第一行涂成黑色，第二行涂成白色，以此类推
- C. 将棋盘的格子染上黑白两种颜色，让黑色格的旁边都是白色格，白色格的旁边都是黑色格
- D. 使黑色格和白色格数量相等的染色方法

答案 C

解析 根据黑白相间染色定义可知应选C.

探索1

国际象棋棋盘分成8行8列，共有（ ）个格，对棋盘进行黑白相间染色后，有（ ）个黑格，（ ）个白格。（ ）.



A. 64 , 22 , 22

B. 32 , 16 , 16

C. 64 , 32 , 32

D. 100 , 50 , 50

答案 C

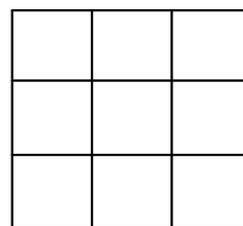


**解析** 国际象棋棋盘共有64个格，黑白格各占一半，所以各有32个格。  
 故选C。

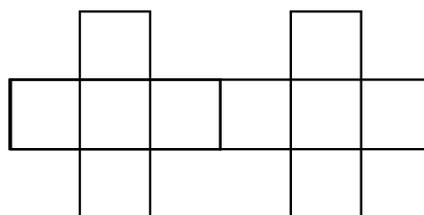
**例题1**

艾迪家要铺地砖，用的是形如□□的 $1 \times 2$ 的长方形地砖，他遇到了一些问题，快来帮他思考一下吧！

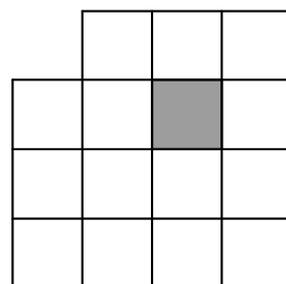
(1) 如下图所示的区域，能否用5块地砖不重叠地拼出来？



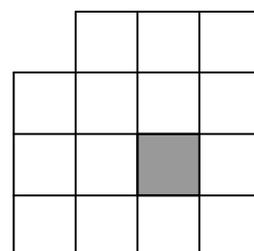
(2) 如下图所示的区域，能否用5块地砖不重叠地拼出来？



(3) 如下图所示的区域，能否用7块地砖不重叠地拼出来？



(4) 如下图所示的区域，能否用7块地砖不重叠地拼出来？

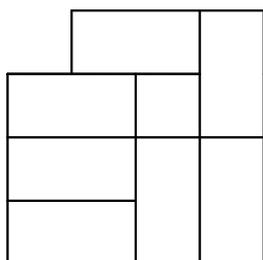


**答案** (1) 不能  
 (2) 不能

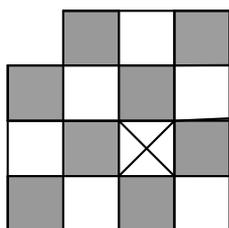
- (3) 能
- (4) 不能

**解析**

- (1) 5块地砖不重叠，应该覆盖10小格，图中只有9小格，所以不能。
- (2) 经观察发现，左侧十字的左、上、下三格都要跟左侧十字的中心格连接，所以无法实现。
- (3) 可以，经尝试，一种满足要求的拼法如下：



- (4) 将图形进行黑白相间染色，如图：



一个 $1 \times 2$ 的小长方形放在这样的棋盘上，必然覆盖1黑格1白格，故若能覆盖，则黑白格的个数应该相等。但实际上有8黑6白，故知不可能被恰好覆盖。

**【教学提示】**

4个小问老师可以依次让学生尝试画一画、圈一圈。4小问的设置逻辑如下：

- (1) 格数不对等的问题，无论如何无法满足要求；
- (2) 能从局部看出无法拼成，这个图不可能同时满足几个角落格都被覆盖，是比较灵活的分析方法；
- (3) 能经过简单的尝试画出分割方法（一般2分钟以内）；
- (4) 无法拼成，老师启发同学思考无法拼成的原因，提出如下问题。

提问1：我们怎么区分这类问题到底是像第3小题一样，有正确的拼法，但是需要反复尝试，还是像第4小题一样，根本就没有正确的拼法？

预设回答1：试！（老师可以回应：如果光靠试的话，假如图形比第4问再大一些，可能要试很久了！）



预设回答2：需要有一个判断的方法。

(老师用课件展示课前活动中的黑白相间染色图)

提问2：现在往这个棋盘上面放 $1 \times 2$ 的小方块，你发现了什么？

预设回答：不管怎么放，都能盖住1格小黑格和1个小白格。

提问3：那黑白格的数量应该有怎样的关系呢？

预设回答：数量应该相等。

提问4：现在谁能解释一下为什么第3张图可以拼出来，第4张图拼不出来？

预设回答：第3张图黑白格数量一样多，第4张图黑格比白格多2个。

提问5：那我们再用这个判断方法来看看第2张图，有什么发现？

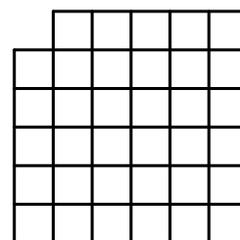
预设回答：第2张图里黑白格的数量也一样多，但是拼不出来。

老师总结：我们要注意，当黑白格数量不一样的时候，说明不能用若干个 $1 \times 2$ 拼出来，当黑白格数量一样的时候，说明有可能用若干个 $1 \times 2$ 拼出来，但是不能确定，还要具体尝试一下，只有实际能拼出来的，才是真正符合要求的。

(这里要强调一个重点，黑白格数不一样，证明一定没有拼法，但黑白格数一样，只说明可能有拼法，真正的拼法还要通过尝试找到。)

## 例题2

下图是把一张 $6 \times 6$ 的方格纸去掉两个角所得的图形。能否用 $1 \times 2$ 的小长方形恰好拼满这张表格？



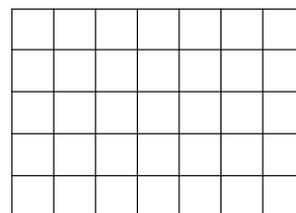
**答案** 不能。

**解析** 不能，将图形进行黑白相间染色，有18个黑格和16个白格（或18白16黑），因为每次 $1 \times 2$ 的小长方形恰好覆盖了1黑1白，如果可以的话，覆盖的黑格与白格的数目应该一样，但实际上黑白格数目不同，所以不能。



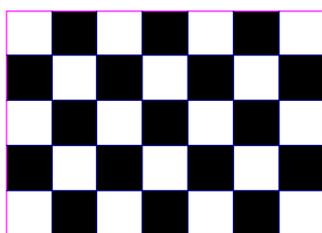
例题3

六年级一班全班有35名同学，共分成5排，每排7人，坐在教室里，每个座位的前后左右四个位置都叫作它的邻座。如果要让这35名同学都恰好坐到他的邻座上去，能办到吗？为什么？



**答案** 不能办到，证明见解析。

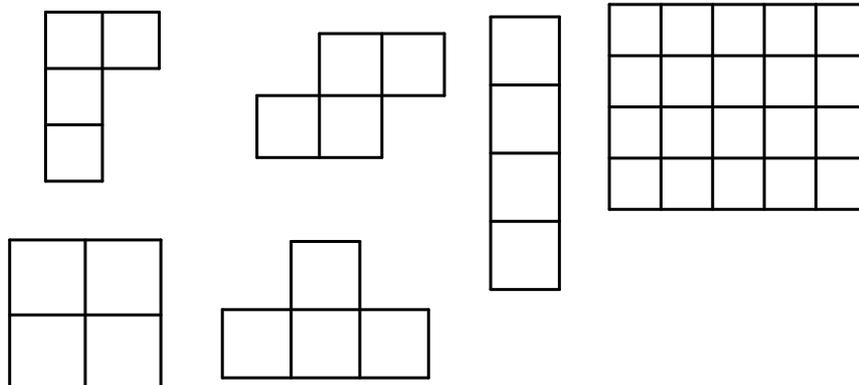
**解析** 黑白相间染色后，每位同学都坐到邻座，相当于所有白格的人坐到黑格，所有黑格的人坐到白格。但实际上图中有17个黑格，18个白格，个数不相等，故不能办到。



挑战1

请回答下列问题：

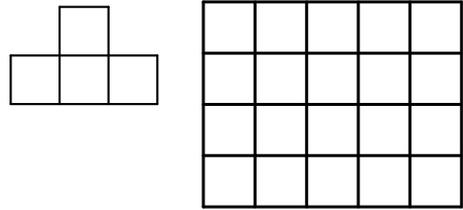
(1) 右图中有5个由4个 $1 \times 1$ 的小正方形组成的不同形状的硬纸板。问能用这5个硬纸板拼成右图中 $4 \times 5$ 的长方形吗？如果能，请画出一种拼法；如果不能，请简述理由。





(2) 如果现在可以使用的拼板变成5个“T”字型方块，还能拼成右图中 $4 \times 5$ 的长方形吗？

如果能，请画出一种拼法；如果不能，请简述理由。



**答案** (1) 不能。

(2) 不能。

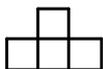
**解析** (1) 将 $4 \times 5$ 长方形黑白相间染色，其中有10个黑格和10个白格，其中的T形块能覆盖1白3黑或3白1黑，其余块均为2白2黑，那么5个小图形共覆盖9白11黑或11白9黑，因此无论如何也不能恰好覆盖大长方形。

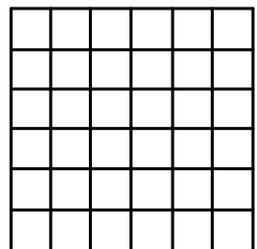
(2) 将 $4 \times 5$ 长方形黑白相间染色，其中有10个黑格和10个白格，其中的T形块能覆盖1白3黑或3白1黑，那么5个T形共覆盖奇数个白格和奇数个黑格，与10白10黑不可能相等，因此无论如何也不能恰好覆盖大长方形。

**【教学提示】**

设置第2小问的意义在于：多个T形时，这些T形的覆盖情况不一定相同，可能有一部分是1黑3白，一部分是3黑1白，所以不能简单地认为所有T形的覆盖情况相同，来计算黑白格数。这一点也是本讲“捉虫时刻”板块考察的易错点。

**随堂练**

能否用9个  所示的卡片拼成一个 $6 \times 6$ 的棋盘？



A. 不能

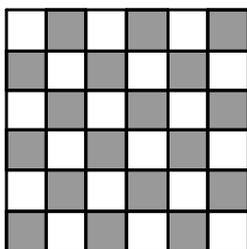
B. 可能



**答案** A

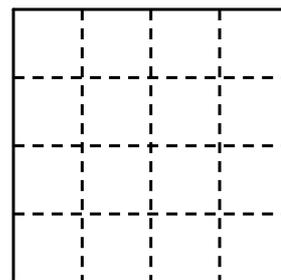
**解析** 如图所示，将 $6 \times 6$ 的棋盘黑白相间染色，有18个黑格。

而每张卡片盖住的黑格数只能是1或者3，所以每张卡片盖住的黑格数是个奇数，9张卡片盖住的黑格数之和也是奇数，不可能盖住18个黑格。



**PK对战**

1 如图所示的区域中，若黑白间隔染色，则黑格数量与白格数量（ ）。

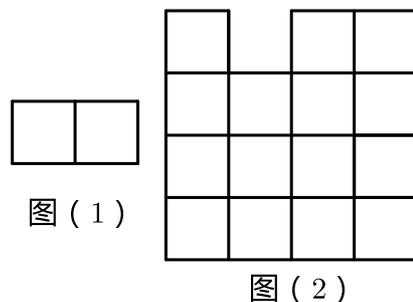


- A. 黑格数量比白格数量少1个
- B. 黑格数量比白格数量多1个
- C. 黑格数量与白格数量相同
- D. 不能确定数量关系

**答案** C

**解析** 黑格数量与白格数量相同。

2 一种骨牌是由形如图（1）的长方形组成，则下面的图形（2）\_\_\_\_\_（填能或不能）用这种骨牌不重复地完全覆盖。

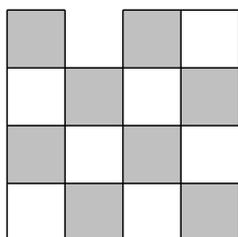


A. 能

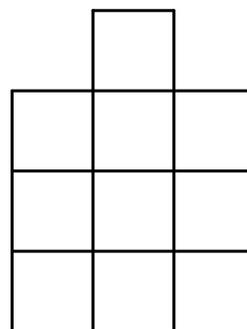
B. 不能

**答案** B

**解析** 如图染色，黑白不相等，不行。



3 如图所示为10个小方格组成的图形，请问可否把它们分别剪成5个 $1 \times 2$ 的小矩形？

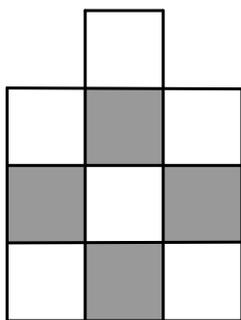


A. 能

B. 不能

**答案** B

**解析** 不能。将这10个小方格黑、白相间染色，有4个黑格，6个白格（或倒过来也可）相邻两个方格必然是一黑一白，如果能剪裁成5个小长方形，那么10个格应当是黑、白各5个，与实际情况不符，所以不能剪裁成5个由相邻两个方格组成的长方形。



捉虫时刻

用1个  和6个  能否不重叠的覆盖一个  $4 \times 7$  的棋盘？为什么？

马小虎的解题过程如下，他做的对吗？请你帮他挑挑错吧！

解：把棋盘黑白染色，黑白格应各为14个，但1个  一定覆盖1个黑格3个白格，那么1个  和6个  一定覆盖13个黑格15个白格，但实际有14个黑格和14个白格，矛盾。所以不能覆盖。

**答案** 结论是正确的，但分析过程有问题。

**解析** 结论是正确的，但分析过程有问题，1个  可能覆盖1个黑格3个白格或3个黑格1个白格，所以1个  和6个  可能覆盖13个黑格15个白格或15个黑格13个白格，但无论如何都会造成矛盾。

### 三、模块2 路径问题

探索2

如果在一个地图上，从黑格走一步一定走到白格，从白格走一步一定走到黑格，那么从白格出发，走55步会走到 \_\_\_\_\_，走100步会走到 \_\_\_\_\_。

- A. 黑格；黑格
- B. 白格；黑格
- C. 黑格；白格
- D. 白格；白格

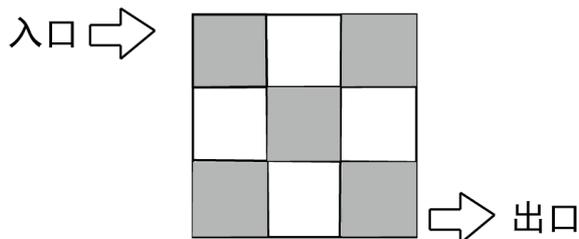
**答案** C



**解析** 奇数步走到异色格，偶数步走到同色格，应选C。

**铺垫2**

规则：图中是9个相邻排列的房间，其中4间的地板上铺上了白砖，5间的地板上铺上了黑砖。用笔尖划线，按照任意你喜欢的路线，经过相邻房间从入口走到出口，观察你经过的每个房间的颜色，用不同的方式试几次，总结一下你发现的规律。



**答案** 规律：经过的房间颜色一定是按照“黑—白—黑……白—黑”交替的。

**解析** 略。

**【教学提示】**

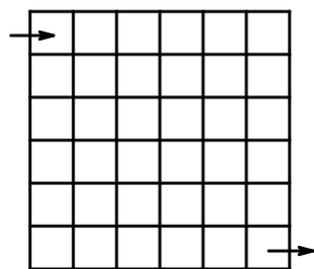
学生最开始很有可能走的都是最短路线，形成“黑—白—黑—白—黑”的结论，老师可以多叫两个同学，提示“任意你喜欢的路线”，还有没有什么路线是跟前几位同学是不一样的，可能就会有同学想到，可以不走最短路线，在图形中走蛇形，甚至转来转去（笑点），老师需及时肯定这些同学的想法，因为这样的走法确实也符合题目要求。

最后可以从中总结出两点，一是相邻的两格一定是黑白交替的，老师可以由此往下延伸讲解模块一；二是在这样的方格中所走的路线一定是黑白交替的。

**例题4**

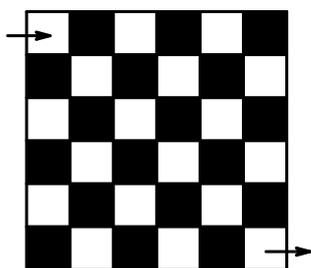
**1 2011年北京六年级期中**

有一次车展共  $6 \times 6 = 36$  个展室，如右图，每个展室与相邻的展室都有门相通，入口和出口如图所示。参观者能否从入口进去，不重复地参观完每个展室再从出口出来？



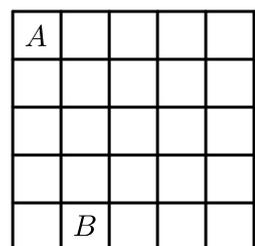
**答案** 不可能

**解析** 如下图，



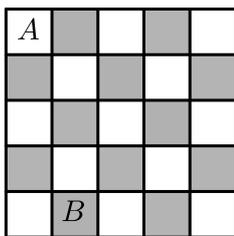
对每个展室黑白相间染色，那么每次只能从黑格到白格或从白格到黑格。由于入口处和出口处都是白格，而路线黑白相间，首尾都是白格，于是应该白格比黑格多1个，而实际上白格、黑格都是18个，故不可能做到不重复走遍每个展室。

2 能否从图中的A格出发，每次走到相邻的小格子，最后走到B格，并且每个格子都刚好到一次？



**答案** 不能。

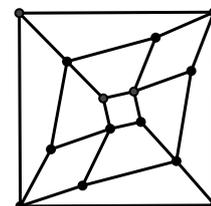
**解析** 按照黑白相间染色，



每次走都是从黑格到白格或者从白格到黑格，如果可以的话，黑格数目应该等于白格，但实际黑格数和白格数目不相同，所以不能。

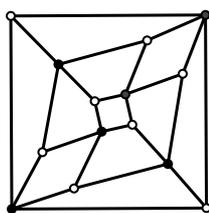
例题5

下图是连接14个城市的道路图。是否有一条路线可以经过每一个城市恰好一次？



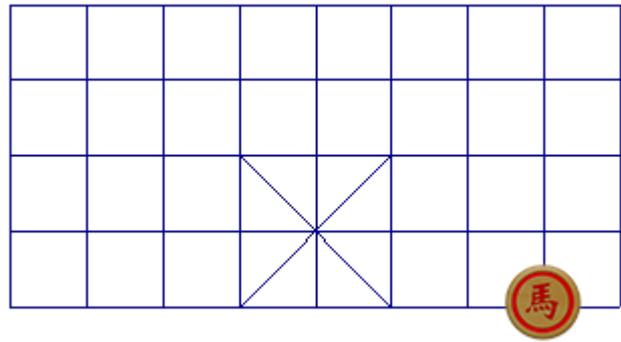
答案 不能。

解析 将图形中的节点黑白相间染色，那么从黑点只能走到白点，从白点只能走到黑点。如果要每个节点都恰好经过一次，那么黑点和白点的数目应该刚好相等或者差1。而其中一共有6个黑点，8个白点，白点比黑点多2个，因此不能。



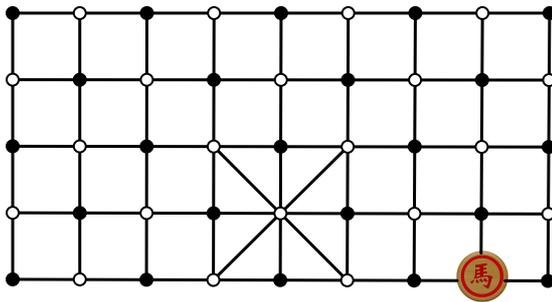
挑战2

右图是半张中国象棋棋盘，棋盘上放有一只马。众所周知，马是走“日”字的。请问：这只马能否不重复地走遍这半张棋盘上的每一个点，然后回到出发点？



**答案** 不可能。

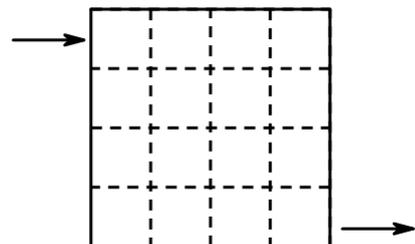
**解析** 马走“日”字，在中国象棋棋盘上走有什么规律呢？为方便研究规律，如下图所示，先在棋盘各交点处相间标上○和●，图中共有22个○和23个●。因为马走“日”字，每步只能从○跳到●，或由●跳到○，所以马从某点跳到同色的点（指○或●），要跳偶数步；跳到不同色的点，要跳奇数步。现在马在○点，要跳回这一点，应跳偶数步，可是棋盘上共有 $22 + 23 = 45$ 个点，所以不可能做到不重复地走遍所有的点后回到出发点。



**补充**

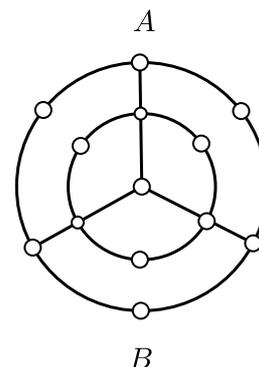
1 解答下列各题：

(1) 如图，某个展览区域共有16个房间，相邻两个房间之间有一扇门可以供出入，现在从左上角进入展览区，要求经过所有房间各一次，然后从右下角的房间出来。你能做到吗？并说明原因。





(2) 如图，在两个圆和三条线上共有13个点，一只蚂蚁从A点出发，要求不重复的经过所有的点，能否最后到达的点是B点？



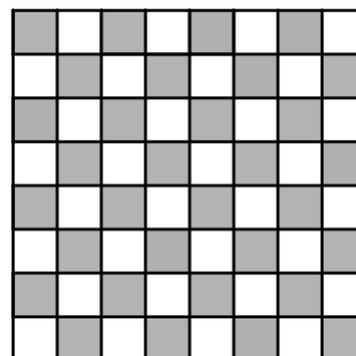
**答案** (1) 不能，原因见解析。

(2) 不能。

**解析** (1) 不能。因为黑白染色后，黑白数目相同。出口和入口同色，所以黑白数目应该相差1，矛盾。

(2) 不能。因为黑白染色后，黑白数量不一样，假设A点是黑色，那么会有7个黑点和6个白点，从黑点开始必须从黑点结束，但是B点是白点，矛盾。

2 下图是国际象棋的棋盘，棋盘的左下角的格中放有一只马。众所周知，马是走“日”字的。请问：这只马能否不重复地走遍棋盘上的每一个格，最后停在右上角的格中？



**答案** 不能

**解析** 马走“日”字，在棋盘中每次会从白格走到黑格，从黑格走到白格。从白格走到白格，则走的白格数应该比黑格数多1，但棋盘中共有32黑，32白，矛盾。所以不能。



3 在下表中，对有公共边的两格内的数同时加上1或同时减去1叫做一次操作。经过有限次操作后由左下表变为右下表，那么右下表中A处的数是\_\_\_\_\_。

1	0	1
0	1	0
1	0	1

→

A	2000	2000
2000	2000	2000
2000	2000	2000

**答案** 5

**解析** 方法一：将左图黑白相间染色，因为每次有两个数同时被加上或减去同一个数，所以表中黑白数码和的差是不变的，原来黑白数码和的差是5，经过若干次变化后，差仍应是5，所以答案是5。

方法二：所求。实际操作：逐一满足除A外的8个格子，最终得到的A格中数即为所求。

1	0	1
0	1	0
1	1999	2000

→

1	0	1
0	1	0
2	2000	2000

→

1	0	1
1998	1	0
2000	2000	2000

→
  

1	0	1
2000	3	0
2000	2000	2000

→

1	0	1
2000	2000	1997
2000	2000	2000

→

1	0	4
2000	2000	2000
2000	2000	2000

→
  

1	1996	2000
2000	2000	2000
2000	2000	2000

→

5	2000	2000
2000	2000	2000
2000	2000	2000

4 下表中，对有公共边的两格内的数同时加上1或同时减去1叫做一次操作。经过有限次操作后由左下表变为右下表，那么右表中A处的数是\_\_\_\_\_。

1	2	3
4	5	6
7	8	9

8	7	6
5	A	4
3	2	1



答案 5

解析 把原先的1、3、5、7、9称为黑格，原先的2、4、6、8称为白格，每次操作后黑白格的总和的差不变。故而结束状态的差也是 $(1 + 3 + 5 + 7 + 9) - (2 + 4 + 6 + 8) = 5$ ，故而 $(8 + 6 + A + 3 + 1) - (7 + 5 + 4 + 2) = 5$ ， $A = 5$ 。

思维导图



我是小讲师

博士带艾迪薇儿一起参加一场车展，总共 $4 \times 4 = 16$ 个展室，如图，每个展室与相邻的展室都有门相通，入口和出口如图所示。他们之间进行了如下的对话。

艾迪：这里真大啊！

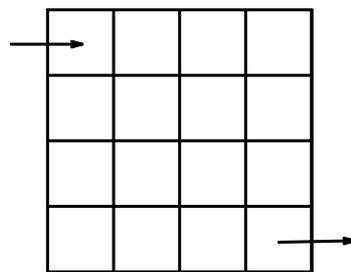
博士：是啊，这里面的每个展室，都放着一副“镇室之宝”，那可都是世界名画！

薇儿：太好了！我想把每个展室都看一遍！

博士：没问题，但是今天时间有限，如果想都看一遍，同一个展室我们就不能重复进两次！

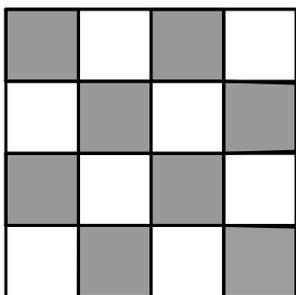
薇儿：艾迪，你知道吗，到底有没有这样的走法呢？

快来替艾迪说一说，有没有这样的走法，为什么？



**答案** 没有。

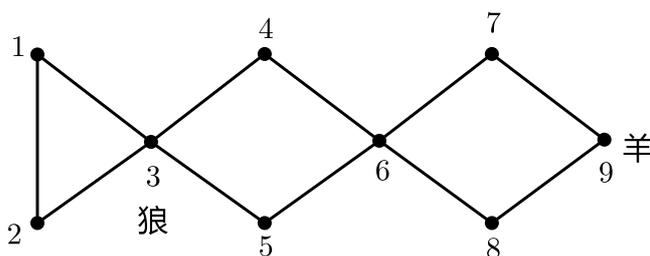
**解析** 如下图对展室进行黑白染色，则入口与出口都是黑色。若能从出口出来，则走路方式必为黑→白→黑→白→……→黑→白→黑，即黑色格比白色格多1个，这与8黑8白的事实相矛盾，故不可能。



**生活应用**

在下面的棋盘中跟小伙伴玩一个游戏，想想背后的数学原理吧！

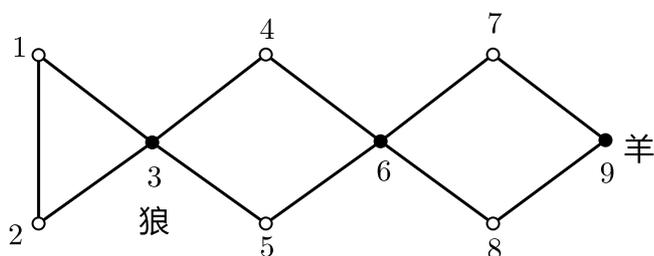
游戏规则：棋盘如下图所示，由9个小圆圈排列而成，用1~9编号。在3号和9号小圆圈中各放一枚棋子，分别代表狼和羊。若两个小圆圈之间有线相连，则棋子可以从其中的一个走入另一个。现在由狼先走，双方轮流，每方每次走一步，每步可以从一格走到有线相连的邻格之中。如果狼走了不超过6步后，就走入羊所在的格子之中，就算狼抓住了羊；反之羊就成功逃脱啦。究竟谁能获胜呢？快来试一试吧！





**答案** 狼获胜 .

**解析** 如下图, 从9号小圆圈开始向左依次黑白相间地染上颜色 . 这样, 3号、6号、9号小圆圈都被染成了黑色, 其它小圆圈都被染成了白色, 并且1号和2号两个白色小圆圈相邻 .



狼要想抓住羊, 必须把它所在的小圆圈的颜色调整到与羊所在的小圆圈的颜色相反才有可能 . 于是, 用到了①、②号同色且相邻的两个小圆圈 . 狼应采取“以退为进”的策略, 先退到①, 狼前3步这样走: ③→①→②→③ .

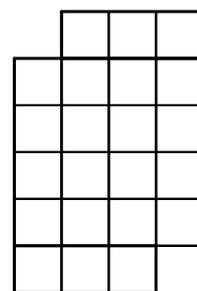
走3步之后, 狼回到了原来的③号黑圈 . 这时, 羊由9号黑圈出发, 走3步, 必然处于白圈之中, 即羊在4、5、7、8号小圆圈中的一个 . 如果在4、5号小圆圈中, 狼只需再走一步就可以抓住羊了 . 如果在7、8号小圆圈中, 狼可以再走两步走到6号小圆圈中, 此时羊走了2步仍在4、5、7、8号小圆圈中的一个 . 此时狼只需再走一步也可以抓住羊, 狼抓住羊前后不超过6步, 所以狼获胜 .

**【教学提示】**

这个问题可以让学生在白板前进行, 先让两位同学对抗, 一般不会立刻想到解析中的方法, 往往是羊获胜, 然后老师提出要和学生对抗, 让学生选择走哪一方, 学生看到羊获胜会选羊, 老师再用上述方法取胜, 在过程中让学生注意到狼的特殊走法, 最后引导学生利用今天所学的知识解决这个问题 .

## 四、本讲巩固

1 图中是把一张  $4 \times 6$  的方格纸去掉两个角所得的图形 . 能否用  $1 \times 2$  的小长方形恰好拼满这张表格 ?



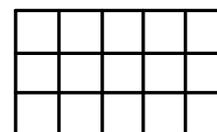
A. 能

B. 不能

**答案** B

**解析** 将其黑白染色发现12黑10白（或12白10黑）， $1 \times 2$ 的小长方形每次恰好覆盖1黑1白，而图中黑白数量不等，所以不能做到。

2 六年级一班全班有15名同学，共分成3排，每排5人，坐在教室里，每个座位的前后左右四个位置都叫作它的邻座。如果要让这15名同学都恰好坐到他的邻座上去，能办到吗？为什么？

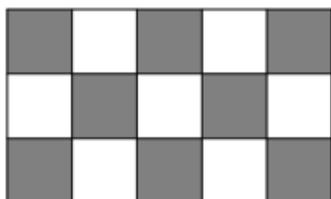


A. 能

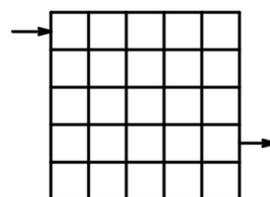
B. 不能

**答案** B

**解析** 黑白相间染色后，每位同学都坐到邻座，相当于所有白格的人坐到黑格，所有黑格的人坐到白格。但实际上图中有8个黑格，7个白格，个数不相等，故不能办到。故选B。



3 有一次车展共 $5 \times 5 = 25$ 个展室，如图，每个展室与相邻的展室都有门相通，入口和出口如图所示。参观者能否从入口进去，不重复地参观完每个展室再从出口出来？

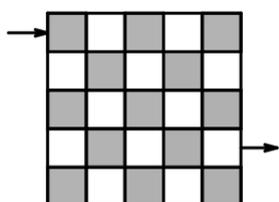


A. 能

B. 不能

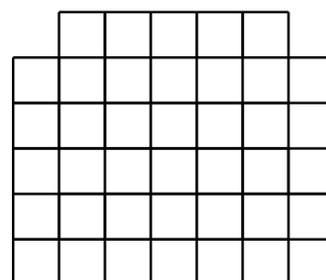
**答案** B

**解析** 如图，对每个展室黑白相间染色，那么每次只能从黑格到白格或从白格到黑格。入口处是黑格，从入口到出口共要走24步，那么最后一步必然是黑格。然而出口处是白格，因此不可能不重复的走遍每个展室。



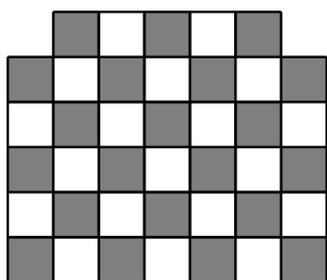
## 五、基础过关

1 下图是由40个小正方形组成的图形，\_\_\_\_\_（填能或不能）将它剪裁成20个相同的长方形。

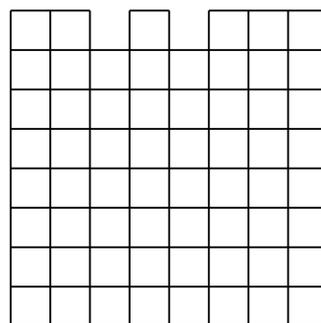


**答案** 不能

**解析** 将40个小正方形剪裁成20个相同的长方形，就是将图形分割成20个 $1 \times 2$ 的小长方形，将图形黑白相间染色后，发现有21黑，19白，黑、白格数目不等，而 $1 \times 2$ 的小长方形覆盖的总是黑白格各一个，所以不可能做到。

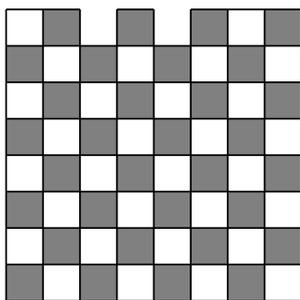


2 如图，由62个方格组成的图形，\_\_\_\_\_（填能或不能）用31个形如  $\square\square$  的小长方形不重复地盖住它且不留空隙。



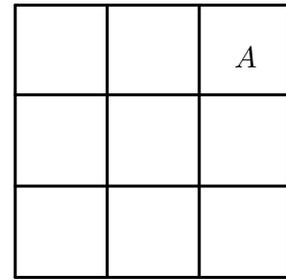
**答案** 不能

**解析** 一个  $1 \times 2$  的小长方形放在这样的棋盘上，必然覆盖1黑格1白格，故若能覆盖，则黑白格的个数应该相等。但实际上此图有32黑30白，故不可能被恰好覆盖。



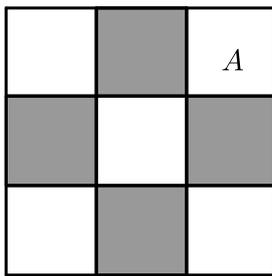
3 2012年北京六年级期中

下图是学校素质教育成果展览会的展室，每两个相邻的展室之间都有门相通。有一个人打算从A室开始依次而入，不重复地看过各室展览之后，仍回到A室，问他的目的\_\_\_\_\_（填能或不能）达到，为什么？



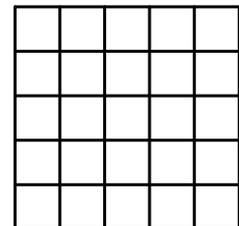
**答案** 不能

**解析** 采用染色法。如图，



共有9个展览室，对这9个展览室，黑白相间地进行染色，从白室A出发走过第1扇门必至黑室，再由黑室走过第2扇门至白室，由于不重复地走遍每一间展览室，因此将走过黑白相间的8个展览室，再回到白室A，共走过9扇门。由于走过奇数次门至黑室，走过偶数次门至白室。现在，走过9扇门，必至黑室，所以无法回到原来的白室A。

4 如图，某展览馆由25个小展厅组成，有公共边的展厅是相通的。\_\_\_\_\_（填能或不能）从某个展厅出发，不重复地浏览完所有展厅之后，再回到入口展厅。若能请给出具体例子，若不能请说明理由。

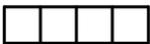


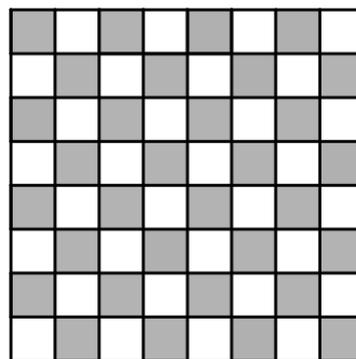
**答案** 不能

**解析** 把棋盘黑白染色，若能，由于最后一个展厅与入口展厅必然相邻，故知起止位置不同色，这将造成展厅总数为偶数，与25个展厅的事实相矛盾。

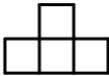


## 六、能力提升

- 1 用3个  和13个  \_\_\_\_\_ (填能或不能) 覆盖国际象棋棋盘。(图形可以旋转)



**答案** 不能

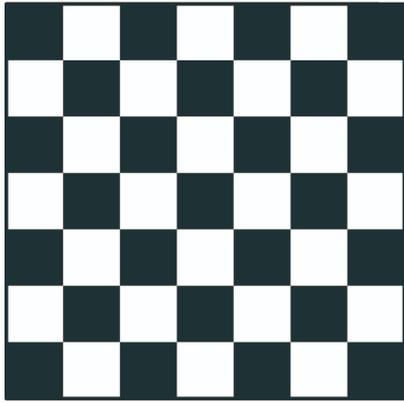
**解析** 3个  将造成总覆盖黑格数为奇数，与32个黑格的事实相矛盾。

故答案为：不能。

- 2 五年级一班有49名同学，共分成7排，每排7个人。新年到了，每个同学都准备了一个礼物送给自己前后左右相邻的某一个同学，那么每个同学都刚好收到一个别人送的礼物，\_\_\_\_\_ (填能或不能) 办到。

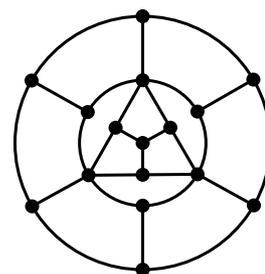
**答案** 不能

**解析** 如图是一个 $7 \times 7$ 的方格，其中每一个方格表示一个座位。将方格黑白相间地染上颜色，这样黑色座位与白色座位都成了邻座。因此每位黑格同学都把礼物送给了白格；白格都把礼物送给了黑格。但实际上图中有25个黑格，24个白格，黑格与白格的个数不相等，故不能办到。



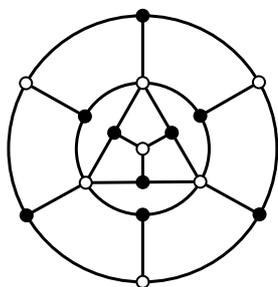


3 如图，\_\_\_\_\_（填能或不能）沿此图上的线画出一条线，使得每个节点都恰好经过一次。



**答案** 不能

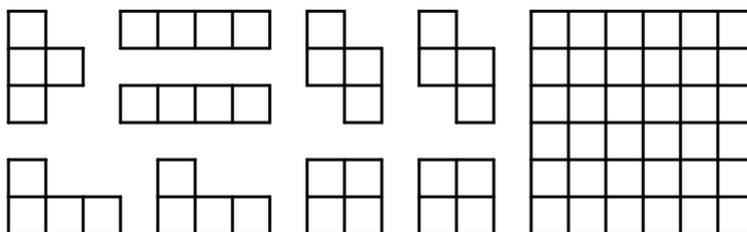
**解析** 以“相邻点不同色”的方式对这个道路图进行黑白染色，如图：



若存在这样的一条路线，则由于从黑点必然走到白点，从白点必然走到黑点，可知两种点的个数差最多为1，但实际上黑点9个白点7个，矛盾，故知不存在这样的路线。

## 七、创新挑战

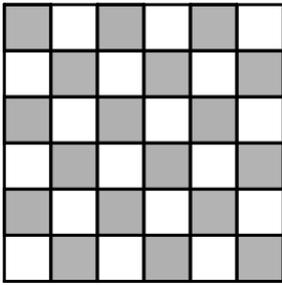
如图，有9个由4个 $1 \times 1$ 的小正方形组成的不同形状的硬纸板。\_\_\_\_\_（填能或不能）用这9个硬纸板（可以旋转、翻转）拼成右面的 $6 \times 6$ 的正方形。如果能，请画出一种拼法；如果不能，请简述理由。

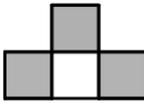


**答案** 不能

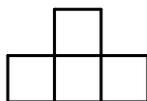


解析



棋盘染色，一定是3黑1白或者3白1黑，其他都是两黑两白，

所以这样组合的图一定是黑格和白格是两个奇数，但是染色可知需要的是18个黑格和18个白格。

对大正方形进行国际象棋型黑白染色，则除了形中黑格数为奇数，其余8个图形在放入时必然覆盖2黑格2白格，故知最后黑格数为奇数，这与18个黑格的事实相矛盾。

## 第5讲 分数四则混合运算 B版

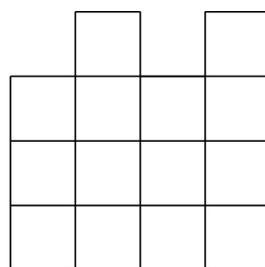
### 一、预习

#### 1. 课前热身

1. \_\_\_\_\_ (填能或不能) 用形如下图(1)的小长方形, 不重复的完全覆盖下图(2)形状的图形.



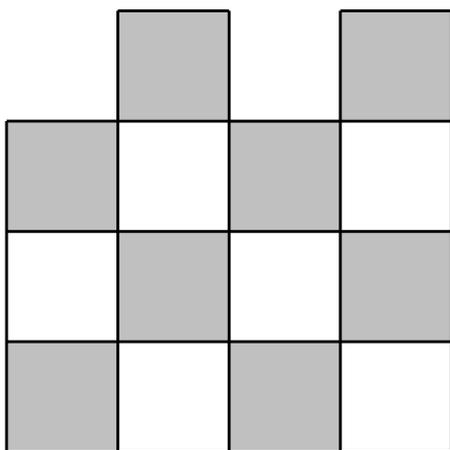
图(1)



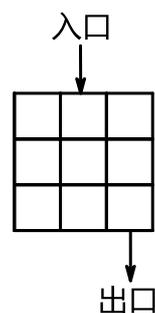
图(2)

**答案** 不能

**解析** 如图染色, 黑白不相等, 不行.



2. 博物馆共有9个展室且任意两个相邻的展室都是连通的, 那么小明能否从入口开始不重复地经过所有展室最后从出口离开?

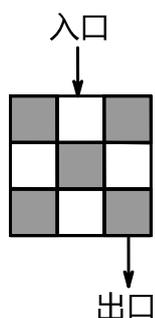


A. 能

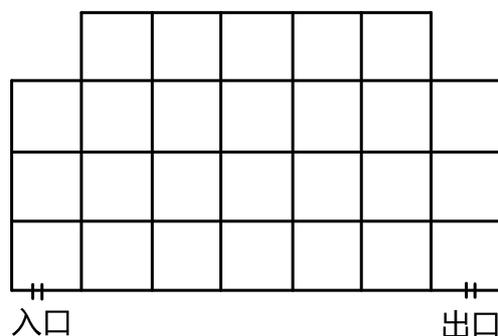
B. 不能

**答案** B

**解析** 不能。将这9个小方格黑、白相间染色，从入口到出口第一个必然是白格，最后一个必然是黑格(或倒过来也可)，从白格开始每走到相邻的一格颜色必然改变，颜色顺序白-黑-白-黑-……，经过9次将所有展室走完，落在白格，与最后一个必然是黑格矛盾，所以不可能。



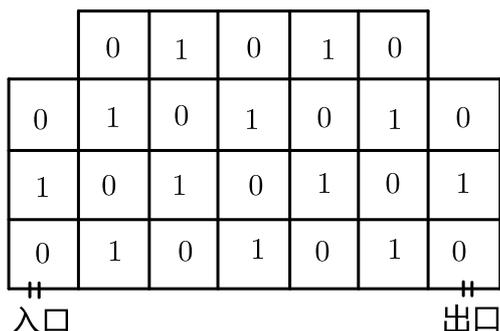
3 一展览馆有26间展室，图中每个方格代表一个展室，每相邻展室有门相通，出口、入口如图所示。问：\_\_\_\_\_ (填“能”或者“不能”)找到一条从入口到出口的参观路线，使不重复不遗漏地走过每一间展室？



**答案** 不能



**解析** 我们把所有的展览室分为两类，分别标上0和1，如图所示：



通过分类看出，参观者只能从标记0的展览室进入标记1的展览室，或从标记1的展览室进入标记为0的展览室，而不能从标记1的展览室直接进入另一个标记1的展览室或从标记为0的展览室直接进入另一个标记为0的展览室，从而知，参观者的的路线只能是：（入口）  
 $\rightarrow 0 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{2} 0 \xrightarrow{3} 1 \xrightarrow{4} 0 \xrightarrow{5} 1 \xrightarrow{6} 0 \rightarrow 1 \dots 1 \xrightarrow{n} 0$ （出口），由此路线不难看出， $n$ 是偶数，但又由于展览室总数是26，所以 $n=25$ 为奇数，导致矛盾，因此所求路线不存在。

## 2. 知识GPS

### 本讲内容（运算求解）

分小四则混合运算，繁分数

### 前铺知识

分数加减计算，分数乘除计算

### 后续知识

分数巧算

### 课内衔接：

分数加减法

分数乘法

分数除法

### 教学目标

掌握分数小数的四则混合计算；



掌握常见分小互化；  
会解简单繁分数形式的四则混合

### 教学重点

分数四则混合计算

### 教学难点

简单繁分数形式的四则混合

## 3. 板书设计

### 一、分数四则混合运算

先乘除，后加减，小括号优先

### 二、分、小互化

万能法：化成分数

小化分：写成分母是10、100...的分数，再约分

分化小：
 
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{分子} \div \text{分母} \\ \text{将分母扩倍成} 10、100 \dots \text{例：} \frac{3}{25} = \frac{12}{100} = 0.12 \end{array} \right.$$

### 三、繁分数

1. 主分数线：最长的分数线
2. 化简繁分数：(1) 从短到长；(2) 分数线 $\Rightarrow$ 除号。

## 4. 教学说明

模块一：分数四则混合运算

【探索】分数加减乘除计算

【例题1】不带括号的分数四则混合运算

【例题2】带括号的分数四则混合运算



## 模块二：分小四则混合运算

【例题3】分小互化

【例题4】不带括号分小四则混合运算

【例题5】带括号分小四则混合运算

## 模块三：繁分数

【挑战1】简单繁分数化简

【挑战2】繁分数形式四则混合

## 5. 追本溯源

**小朋友们，你们知道为什么乘除法运算要优先于加减法运算吗？**

【参考话术】对，特别好，我们应该先算乘除法再算加减法。那大家有没有想过，为什么非得要先算乘除法再算加减法呢？是因为老师跟你说过，你就死记硬记记住的吗？其实啊，乘除法的运算比加减法更加高级，也就是说乘除法是高级运算。那么乘除法高级，高级在哪呢？其实，乘除法的高级体现在简便上。人们在远古活动中，数都是非常小的，比如今天打2只兔子，明天打2只兔子，那么是2加2等于4只兔子。但是随着人类社会的不断进步，我们发现我们的数越来越多，越来越大。比如2加2加2加2……有100个2相加，一直加一直加，那么我们不说会不会算，光写也快累死了。那么这个时候乘法就应运而生，我们可以把100个2相加直接写成 $2 \times 100$ 。方便写又方便算。所以，乘法变成了更加高级更加便利的计算。我们在做四则混合运算的时候，自然也要先算乘除法再算加减法。

## 二、模块1 分数四则混合运算

### 知识剖析

分数的四则混合运算也和整数一样遵循先乘除，后加减，有括号先算括号内的运算顺序。乘除法中要把带分数化假分数，加减法中带分数没有必要化为假分数，只需要整数加（减）整数，分数加（减）分数即可。

### 铺垫



计算：

(1)  $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} = ( \quad ) .$

A.  $\frac{7}{10}$

B.  $\frac{5}{15}$

C.  $\frac{1}{3}$

D.  $\frac{1}{10}$

(2)  $2\frac{5}{6} - 1\frac{1}{3} = ( \quad ) .$

A.  $4\frac{7}{6}$

B.  $5\frac{1}{6}$

C.  $1\frac{1}{2}$

D.  $1\frac{3}{6}$

(3)  $1\frac{1}{5} \times 1\frac{1}{6} = ( \quad ) .$

A.  $2\frac{2}{11}$

B.  $\frac{7}{5}$

C.  $\frac{42}{30}$

D.  $1\frac{12}{30}$

(4)  $\frac{5}{12} \div \frac{25}{24} = ( \quad ) .$

A.  $\frac{2}{5}$

B.  $\frac{5}{2}$

C.  $\frac{35}{24}$

D.  $\frac{5}{12}$

**答案** (1) A

(2) C

(3) B

(4) A

**解析** (1) 略.

(2) 略.

(3) 略.

(4) 略.

**探索**

计算：

(1)  $\frac{4}{5} \times \frac{15}{16} \div \frac{3}{2}$

(2)  $\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$

**答案** (1)  $\frac{1}{2}$  ; (2)  $\frac{11}{30}$



**解析** (1) 原式 =  $\frac{4}{5} \times \frac{15}{16} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$   
 (2) 原式 =  $\frac{6}{30} + \frac{20}{30} - \frac{15}{30} = \frac{11}{30}$

**例题1**

计算：

(1)  $\frac{5}{8} - 1\frac{1}{2} \div 2\frac{2}{3}$   
 (2)  $\frac{2}{5} + \frac{7}{12} \times \frac{3}{14} - \frac{3}{8} \div \frac{15}{16}$

**答案** (1)  $\frac{1}{16}$  ; (2)  $\frac{1}{8}$

**解析** (1) 原式 =  $\frac{5}{8} - \frac{3}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{10}{16} - \frac{9}{16} = \frac{1}{16}$   
 (2) 原式 =  $\frac{2}{5} + \frac{1}{8} - \frac{3}{8} \times \frac{16}{15} = \frac{2}{5} + \frac{1}{8} - \frac{2}{5} = \frac{1}{8}$

**例题2**

计算：

(1)  $\frac{3}{10} \div 1\frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7}\right)$  .  
 (2)  $\left[2\frac{1}{3} + \left(5\frac{2}{5} - 2\frac{2}{3}\right) \times 1\frac{2}{3}\right] \div 3\frac{4}{9}$  .

**答案** (1)  $\frac{5}{49}$  .  
 (2) 2 .

**解析** (1) 原式 =  $\frac{3}{10} \times \frac{5}{7} \times \frac{10}{21} = \frac{5}{49}$  .  
 (2) 原式 =  $\left(2\frac{1}{3} + \frac{41}{15} \times \frac{5}{3}\right) \times \frac{9}{31} = \frac{62}{9} \times \frac{9}{31} = 2$  .

**补充**

计算： $1\frac{3}{5} \times \frac{1}{4} + 3\frac{1}{3} \times \frac{9}{10} - \frac{16}{25} \div \frac{4}{15}$  .

**答案** 1 .



**解析** 原式 =  $\frac{8}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{10}{3} \times \frac{9}{10} - \frac{16}{25} \times \frac{15}{4} = \frac{2}{5} + 3 - \frac{12}{5} = 1$  .

**pk对战**

**1** 2018~2019学年福建福州六年级上学期期末第11题2分

$\frac{4}{11} + \frac{2}{11} \times \frac{11}{6} = ( \quad )$  .

A. 1

B.  $\frac{4}{33}$

C.  $\frac{15}{33}$

D.  $\frac{23}{33}$

**答案** D

**解析**

$$\begin{aligned} & \frac{4}{11} + \frac{2}{11} \times \frac{11}{6} \\ &= \frac{4}{11} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{12}{33} + \frac{11}{33} \\ &= \frac{23}{33} \end{aligned}$$

选D .

**2** 计算： $\frac{1}{4} \times \frac{8}{9} \div \frac{9}{10} = \underline{\hspace{2cm}}$  .

A.  $\frac{1}{5}$

B.  $\frac{20}{81}$

C.  $\frac{81}{20}$

D.  $\frac{8}{40}$

**答案** B

**解析**  $\frac{20}{81}$

**3** 计算： $\frac{3}{7} \times \frac{3}{5} - \frac{1}{35} = ( \quad )$  .

A.  $\frac{8}{35}$

B.  $\frac{9}{35}$

C.  $\frac{10}{35}$

D.  $\frac{11}{35}$

**答案** A

**解析** 原式 =  $\frac{9}{35} - \frac{1}{35} = \frac{8}{35}$



4 计算： $(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}) \times (5 - \frac{1}{5})$  .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

答案 D

解析 原式 =  $\frac{5}{6} \times \frac{24}{5} = 4$  .

### 三、模块2 分小四则混合运算

#### 知识剖析

当出现分数和小数混合运算时，可根据实际情况选择统一化为分数或化为小数。若有分数无法化为有限小数，则统一化为分数计算；若化为小数更有利于运算（比如算式中加减法更多），则可以选择化为小数。具体情况应具体分析。

#### 例题3

请仿照第一列的内容，将下列表格填写完整。

小数	0.1	0.3	0.25		0.125		
分数	$\frac{1}{10}$			$\frac{2}{5}$		$\frac{3}{25}$	$3\frac{3}{4}$

答案 答案见解析。

解析

小数	0.1	0.3	0.25	0.4	0.125	0.12	3.75
分数	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{25}$	$3\frac{3}{4}$

#### 例题4

计算：

(1)  $\frac{2}{5} \div 0.2 \times \frac{5}{8} + 3.9$  .

(2)  $2.5 \times \frac{2}{5} + 9.63 - 2.1 \div \frac{1}{3}$  .



**答案** (1) 5.15 .

(2) 4.33 .

**解析** (1) 5.15 .

(2) 4.33 .

**捉虫时刻**

艾迪学习完了今天的课程，在回家做作业时，遇到了这么一道题：计算：

$\frac{1}{5} \times 3.5 + \frac{3}{2} \times 0.4$ ，他的计算过程如下：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5} \times 3.5 + \frac{3}{2} \times 0.4 \\ & \frac{1}{5} \times 3.5 + \frac{3}{2} \times 0.4 \\ & = \frac{1}{5} \times \frac{9}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{2}{5} \\ & = \frac{9}{10} + \frac{3}{5} \\ & = \frac{15}{10} \\ & = \frac{10}{3} \\ & = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

但是老师说艾迪算错了，聪明的小朋友，你知道艾迪哪儿算错了吗？快来帮艾迪改正吧！

**答案** 3.5化分数化错了，正确过程应为：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5} \times 3.5 + \frac{3}{2} \times 0.4 \\ & = \frac{1}{5} \times \frac{7}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{2}{5} \\ & = \frac{7}{10} + \frac{3}{5} \\ & = \frac{13}{10} . \end{aligned}$$

**解析** 3.5化分数化错了，正确过程应为：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5} \times 3.5 + \frac{3}{2} \times 0.4 \\ & = \frac{1}{5} \times \frac{7}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{2}{5} \\ & = \frac{7}{10} + \frac{3}{5} \\ & = \frac{13}{10} . \end{aligned}$$

**例题5**



计算：

$$(1) \frac{1}{12} + \left(4\frac{5}{12} - 3.5\right) \div \frac{11}{24};$$

$$(2) [(5 - 3.5) \times 2.25] \div \left[4 \div \left(4 + 1\frac{1}{3}\right)\right].$$

**答案** (1)  $2\frac{1}{12}$ .

(2)  $\frac{9}{2}$ .

**解析** (1) 原式 =  $\frac{1}{12} + \left(4\frac{5}{12} - 3\frac{6}{12}\right) \times \frac{24}{11}$   
 $= \frac{1}{12} + \frac{11}{12} \times \frac{24}{11}$   
 $= 2\frac{1}{12}$ .

(2) 原式 =  $\left[1\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{4}\right] \div \left[4 \div 5\frac{1}{3}\right]$   
 $= \frac{3 \times 9}{2 \times 4} \times \frac{1}{4} \times \frac{16}{3}$   
 $= \frac{9}{2}$ .

【教学提示】计算时先不要急于进行分数与小数的互化，要观察题目特点，需要化的时候再化。

### 随堂练

计算：

$$(1) \frac{1}{3} + \frac{2}{25} \div \frac{3}{10};$$

$$(2) \frac{10}{17} \times 6.2 + \frac{3}{5} \div 5.1.$$

**答案** (1)  $\frac{3}{5}$ .

(2)  $\frac{64}{17}$ .

**解析** (1)  $\frac{3}{5}$ .

(2)  $\frac{64}{17}$ .

## 四、模块3 繁分数



**知识剖析**

分子或分母本身也含有分数或四则运算的分数叫繁分数。繁分数是一个数，而不是一个算式。

繁分数的化简需要先找出主分数线，确定分子和分母，对分子分母分别计算，最后化成最简形式。分子÷分母的形式。如果分子或分母仍然是个繁分数，那就对分子或分母再确定主分数线，分别化简。以此类推。

**挑战1**

1 化简下列繁分数：

$$(1) \frac{\frac{2}{25}}{\frac{2}{25}}$$

$$(2) \frac{\frac{2}{25}}{\frac{2}{25}}$$

$$(3) \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{25}}$$

$$(4) \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{8}{15}}$$

**答案**

$$(1) \frac{4}{25}$$

$$(2) \frac{1}{25}$$

$$(3) \frac{3}{5}$$

$$(4) \frac{9}{7}$$

**解析**

$$(1) \frac{4}{25}$$

$$(2) \frac{1}{25}$$

$$(3) \frac{3}{5}$$

$$(4) \frac{9}{7}$$

2

$$\frac{7}{6 + \frac{5}{4 + \frac{3}{2}}}$$



**答案**  $\frac{77}{76}$

**解析** 原式 =  $\frac{7}{6 + \frac{11}{2}} = \frac{7}{6 + \frac{10}{11}} = \frac{7}{\frac{76}{11}} = 7 \times \frac{11}{76} = \frac{77}{76}$  .

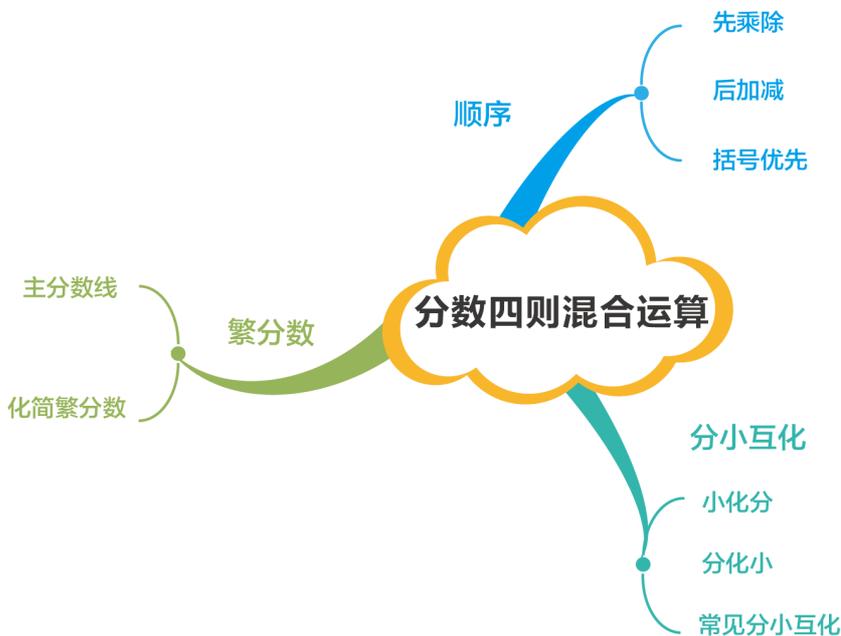
**挑战2**

计算： $2012 \times \frac{3\frac{3}{4} \times 1.3 + 3 \div 2\frac{2}{3}}{(1+3+5+7+9) \times 20 + 3}$  .

**答案** 24 .

**解析** 原式 =  $2012 \times \frac{\frac{15}{4} \times \frac{13}{10} + 3 \times \frac{3}{8}}{25 \times 20 + 3} = 2012 \times \frac{\frac{39}{8} + \frac{9}{8}}{503} = 24$  .

**思维导图**



**我是小讲师**

小朋友们，今天我们学完分小混合运算后，快给爸爸妈妈讲讲，接下来这道题应该如何计算吧！



$$\frac{5}{3} \times 0.4 + \frac{1}{6} \div \frac{3}{2}$$

答案  $\frac{7}{9}$

解析 我们可以先将分小统一，变成  $\frac{5}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \div \frac{3}{2}$ ，然后将分数除法化为乘法  $\frac{5}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{3}$ ，先算乘法后算加法，计算出答案  $\frac{7}{9}$ 。

### 生活应用

#### 分土地

在一个村子里，村长要给村里的居民分土地，按照村里的规定：1个大人可以分到  $\frac{2}{3}$  亩，1个小孩可以分到  $\frac{1}{5}$  亩。有一户人家，一共有6个大人，3个小孩，请问这户家庭一共可以分到多少亩土地？



答案  $4\frac{3}{5}$

解析  $6 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{1}{5} = 4\frac{3}{5}$

## 五、本讲巩固

1 计算： $1\frac{5}{7} \times \left( 5 \div \frac{5}{6} - \frac{5}{6} \div 5 \right) = \underline{\hspace{2cm}}$



**答案** 10

**解析** 原式 =  $\frac{12}{7} \times \left( 5 \times \frac{6}{5} - \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} \right) = \frac{12}{7} \times \left( 6 - \frac{1}{6} \right) = \frac{12}{7} \times \frac{35}{6} = 10$

2 计算： $\frac{9}{17} \times 1.7 - \frac{7}{10} = \underline{\hspace{2cm}}$  .

**答案**  $\frac{1}{5}$

**解析** 原式 =  $\frac{9}{17} \times \frac{17}{10} - \frac{7}{10} = \frac{1}{5}$  .

3 计算： $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}$  .

**答案**  $1\frac{3}{7}$

备选答案： $\frac{10}{7}$

**解析** 原式 =  $1 + \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = 1\frac{3}{7}$  .

## 六、基础过关

1 计算：

$$\frac{8}{17} + \frac{6}{17} \times \frac{5}{6} = \underline{\hspace{2cm}} ;$$

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{11} \times \frac{7}{9} = \underline{\hspace{2cm}} ;$$

$$\frac{11}{24} \div \frac{11}{12} - \frac{1}{12} = \underline{\hspace{2cm}} ;$$

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{15} \times \frac{5}{12} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

**答案** 1:  $\frac{13}{17}$   
2:  $\frac{5}{11}$



$$3: \frac{5}{12}$$

$$4: \frac{5}{9}$$

**解析**  $\frac{13}{17}; \frac{5}{11}; \frac{5}{12}; \frac{5}{9}$

**2** 计算： $\left(3\frac{1}{3} + \frac{3}{4} - 2\frac{5}{8}\right) \div \left(1\frac{1}{5} \div \frac{4}{5}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$  .

**答案**  $\frac{35}{36}$

**解析** 原式 =  $\left(\frac{4}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8}\right) \div \left(\frac{6}{5} \times \frac{5}{4}\right) = \frac{35}{24} \times \frac{2}{3} = \frac{35}{36}$  .

**3** 请将下面的数进行分小互化 .

(1)  $5\frac{3}{4} = \underline{\hspace{2cm}}$  ;

(2)  $1\frac{7}{20} = \underline{\hspace{2cm}}$  ;

(3)  $\frac{47}{10} = \underline{\hspace{2cm}}$  ;

(4)  $1.625 = \underline{\hspace{2cm}}$  ;

(5)  $3.6 = \underline{\hspace{2cm}}$  ;

(6)  $0.28 = \underline{\hspace{2cm}}$  .

**答案** (1) 5.75

(2) 1.35

(3) 4.7

(4)  $1\frac{5}{8}$

(5)  $3\frac{3}{5}$

(6)  $\frac{7}{25}$

**解析** (1) 5.75

(2) 1.35

(3) 4.7

(4)  $1\frac{5}{8}$



(5)  $3\frac{3}{5}$

(6)  $\frac{7}{25}$

4 计算：

$$\frac{17}{18} + \frac{8}{9} \times 0.4 = \underline{\hspace{2cm}} ;$$

$$0.9 + 0.3 \div \frac{3}{4} = \underline{\hspace{2cm}} ;$$

$$\frac{9}{14} \div 0.4 - \frac{6}{7} = \underline{\hspace{2cm}} ;$$

$$\frac{9}{25} \div \frac{9}{19} \times \frac{1}{2} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

答案 1:1.3

2:1.3

3:0.75

4:0.38

解析 略

## 七、能力提升

1 计算：

(1)  $\left(0.5 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \times 0.2 \div \frac{1}{6} = \underline{\hspace{2cm}} .$

(2)  $\left(\frac{1}{3} + 2.5\right) \div \left(2 + 3\frac{2}{3}\right) = \underline{\hspace{2cm}} .$

答案 (1)  $\frac{7}{10}$

(2)  $\frac{1}{2}$

解析 (1) 原式 =  $\frac{6+4-3}{12} \times \frac{1}{5} \times 6 = \frac{7}{10} .$

(2) 原式 =  $\left(\frac{2}{6} + 2\frac{3}{6}\right) \div 5\frac{2}{3} = \frac{17}{6} \times \frac{3}{17} = \frac{1}{2} .$

2 计算：



$$(1) \left[ 14.8 + \left( 3\frac{2}{7} - 1.5 \right) \times 1\frac{3}{25} \right] \div 4\frac{1}{5} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

$$(2) \left( \frac{3}{4} - \frac{5}{8} \right) \div \left( 1\frac{1}{5} \div 0.8 \right) + \frac{11}{18} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

**答案** (1) 4

(2)  $\frac{25}{36}$

**解析**

$$(1) \left[ 14.8 + \left( 3\frac{2}{7} - 1.5 \right) \times 1\frac{3}{25} \right] \div 4\frac{1}{5}$$

$$= \left[ 14.8 + \left( \frac{23}{7} - \frac{3}{2} \right) \times \frac{28}{25} \right] \div 4.2$$

$$= [14.8 + 2] \div 4.2$$

$$= 16.8 \div 4.2$$

$$= 4 .$$

(2)  $\frac{25}{36}$  .

**3** 将下面的繁分数化简为最简分数 .

$$1 - \frac{9}{2 + \frac{8}{3 - \frac{7}{4 - \frac{6}{5}}}} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

**答案**  $\frac{1}{2}$

**解析**

$$1 - \frac{9}{2 + \frac{8}{3 - \frac{7}{4 - \frac{6}{5}}}} = 1 - \frac{9}{2 + \frac{8}{3 - \frac{5}{2}}} = 1 - \frac{9}{2 + 16} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} .$$

## 八、创新挑战

计算：
$$\frac{2\frac{1}{2} \times 0.4 + 1\frac{4}{5} \div 1.8}{\frac{1}{4} + 0.75} = \underline{\hspace{2cm}} .$$



答案 2

解析 2 .





## 第6讲 比的应用 B版

### 一、预习

#### 1. 课前热身

1 2018年广东广州海珠区中山大学附属中学小升初招生卷二第11题1分

计算  $\left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = (\quad)$  .

A.  $\frac{1}{4}$

B.  $\frac{1}{5}$

C.  $\frac{1}{6}$

D.  $\frac{1}{7}$

答案 B

解析  $\left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{10-9}{12} \div \frac{3+2}{12} = \frac{1}{12} \times \frac{12}{5} = \frac{1}{5}$  .

故选B .

2 2017年四川成都六年级竞赛“全能明星”选拔赛第1题2分

计算： $\frac{8}{9} \times \left[ \frac{3}{4} - \left( \frac{7}{16} - \frac{1}{4} \right) \right]$  的值为 ( ) .

A. 1

B. 2

C. 0.5

D. 1.5

答案 C

解析 方法一： $\frac{8}{9} \times \left[ \frac{3}{4} - \left( \frac{7}{16} - \frac{1}{4} \right) \right] = 0.5$  .

方法二： $\frac{8}{9} \times \left[ \frac{3}{4} - \left( \frac{7}{16} - \frac{1}{4} \right) \right]$

$= \frac{8}{9} \times \left( \frac{3}{4} - \frac{7}{16} + \frac{1}{4} \right)$

$= \frac{8}{9} \times \frac{9}{16}$

$= \frac{1}{2}$

$= 0.5$



3 计算： $0.3 + 0.7 \times \frac{5}{9} - \frac{2}{9} = ( \quad )$  .

A.  $\frac{4}{15}$

B.  $\frac{7}{15}$

C.  $\frac{11}{15}$

D. 1

**答案** B

**解析** 原式 =  $0.3 + \frac{7}{18} - \frac{2}{9} = \frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{7}{15}$  .

## 2. 知识GPS

### 本讲内容（实践应用能力）

份数思想；寻找1份量；不变量；解比例应用

### 前铺知识

因数与倍数的认识；比和比例的基础知识

### 后续知识

用比例法解决行程问题

**课内衔接**：北师大版 六年级下册第2单元：比例

### 教学目标

学会利用份数思想解决比例应用题

学会抓不变量，通过统一不变量的份数解决问题

学会列比例方程解决复杂的比例应用题

### 教学重点

份数思想；抓不变量

### 教学难点

抓不变量

## 3. 板书设计

### 一、按比分配

1. 常规思路：把比看成份数，先求1份量，再乘目标份数

2. 化连比：相同的量统一份数



## 二、抓不变量：不变量统一份数

不变量的形式：

1. 单量不变；
2. 和不变；
3. 差不变。

## 三、方程法

1. 设：根据比设未知数， $x$ 代表1份量
2. 解：内项积等于外项积（交叉相乘积相等）

## 4. 教学说明

模块一：按比分配

【例1】按比分配

【例2】化连比、按比分配

模块二：找不变量

【例3】不变量的三个基本题型：单量不变、和不变、差不变

【例4】和不变

【挑战1】差不变

模块三：比例方程的应用

【例5】比例方程

【挑战2】比例方程

## 5. 追本溯源

小朋友们，你们了解中药吗？那你知道中药当中每种成分的配比有多重要吗？

**答案** 略

## 6. 课内衔接



两个数的比表示两个数相除。

15 比 10 记作 15 : 10

10 比 15 记作 10 : 15

42252 比 90 记作 42252 : 90

“:” 是比号。

在两个数的比中，比号前面的数叫做比的**前项**，比号后面的数叫做比的**后项**。比的前项除以后项所得的商，叫做**比值**。例如：

$$\begin{array}{ccccccc}
 15 & : & 10 & = & 15 \div 10 & = & \frac{3}{2} \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \text{前} & & \text{比} & & & & \text{比} \\
 \text{项} & & \text{号} & & & & \text{值} \\
 \text{后} & & & & & & \\
 \text{项} & & & & & & 
 \end{array}$$

比值通常用分数表示，也可以用小数或整数表示。

根据分数与除法的关系，两个数的比也可以写成分数形式。例如：

15 : 10 也可以写成  $\frac{15}{10}$ ，仍读作“15 比 10”。



想一想：比的前项、后项和比值分别相当于除法算式和分数中的什么？比的后项可以是 0 吗？



3. 你还记得商不变的规律和分数的基本性质吗?



49

联系比和除法、分数的关系，想一想：在比中有什么样的规律？

$$6 : 8 = 6 \div 8 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$12 : 16 = 12 \div 16 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

我们先利用比和除法的关系来研究。

$$6 \div 8 = (6 \times 2) \div (8 \times 2) = 12 \div 16$$

$$6 : 8 = (6 \times 2) : (8 \times 2) = 12 : 16$$

$$6 : 8 = (6 \div 2) : (8 \div 2) = 3 : 4$$

$$6 \div 8 = (6 \div 2) \div (8 \div 2) = 3 \div 4$$

你能根据比和分数的关系研究比中的规律吗？

比的前项和后项同时乘或除以相同的数（0 除外），比值不变。

## 二、模块1 按比分配

### 知识剖析

比表示的是所占的份数， $a : b = 3 : 7$ 表示a占3份，b占7份，因此可以根据份数作为分数应用题的“率”，利用量率对应解决比例应用题。



按比分配问题：根据几个量的比，利用比表示份数得到每个量占总数的几分之几，求出结果。这类题往往会告诉我们总数和分量的比。

铺垫1

化简比： $12:24 = \underline{\quad}$ ； $48:60 = \underline{\quad}$ ； $\frac{1}{4}:\frac{1}{3} = \underline{\quad}$ 。  
 $24:36:96 = \underline{\quad}$ ； $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{5} = \underline{\quad}$ 。

- 答案** 1:1:2  
 2:4:5  
 3:3:4  
 4:2:3:8  
 5:20:15:12

**解析**  $12:24 = 1:2$ ； $48:60 = 4:5$ ； $\frac{1}{4}:\frac{1}{3} = 3:4$ ； $24:36:96 = 2:3:8$ ； $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{5} = 20:15:12$ 。  
 故答案为：1:2；4:5；3:4；2:3:8；20:15:12。

探索1

艾迪帮妈妈包韭菜鸡蛋饺子，韭菜与鸡蛋的质量比是3:2，450克的料中，韭菜、鸡蛋各有多少克？



**答案** 韭菜270克，鸡蛋180克。



**解析** 一份的质量： $450 \div (3 + 2) = 90$ （克），韭菜的质量是 $90 \times 3 = 270$ （克），鸡的质量是 $90 \times 2 = 180$ （克）。

**例题1**

1 螃蟹、大虾、贝壳三人拥有的积分卡数量之比为4:5:6，三人一共有积分卡75张，则螃蟹拥有积分卡 \_\_\_\_\_ 张，大虾拥有积分卡 \_\_\_\_\_ 张，贝壳拥有积分卡 \_\_\_\_\_ 张。

**答案** 1:20  
2:25  
3:30

**解析** 方法一：共75张为 $4 + 5 + 6 = 15$ 份，每份5张，那么4份20张，5份25张，6份30张。

方法二：根据题意可知，他们三人各自的积分卡数量分别占三人积分卡总量的 $\frac{4}{4+5+6}$ 、 $\frac{5}{4+5+6}$ 、 $\frac{6}{4+5+6}$ ，所以螃蟹拥有的积分卡数量为 $75 \times \frac{4}{4+5+6} = 20$ （张），大虾拥有的积分卡数量为 $75 \times \frac{5}{4+5+6} = 25$ （张），贝壳拥有的积分卡数量为 $75 \times \frac{6}{4+5+6} = 30$ （张）。

2 艾迪、大宽、薇儿的糖数之比为8:12:13，且已知薇儿比艾迪多20块糖。那么三人总共有多少块糖？

**答案** 三人总共有132块。

**解析** 方法一：因为 $20 \times \frac{8+12+13}{13-8} = 4 \times 33 = 132$ 块，所以三人总共有132块。

方法二：艾迪有 $20 \div (13 - 8) \times 8 = 32$ 块，大宽有 $20 \div (13 - 8) \times 12 = 48$ 块，薇儿有 $20 \div (13 - 8) \times 13 = 52$ 块，一共 $32 + 48 + 52 = 132$ 块。

故答案为：132块。

**捉虫时刻**



甲、乙、丙三个车间共有工人120名，后来进行人员调整，从甲车间调出3人到丙车间，此时三个车间的人数比为7:8:9，那么丙车间原有工人多少名？

马小虎的解题过程如下，他做的对吗？请你帮他挑挑错吧！

解：由于从甲车间调出3人到丙车间，则三个车间原来的人数比为

$$(7+3):8:(9-3)=10:8:6=5:4:3, \text{ 所以丙车间原有工人 } 120 \times \frac{3}{5+4+3} = 30(\text{名}).$$

**答案** 42.

**解析** 人数比7:8:9中的1代表1份，这里的1份并不代表1个人，所以原人数比不是5:4:3，正确算法如下：丙车间现有工人：1份： $120 \div (7+8+9) = 5$ ， $5 \times 9 = 45$ （名），则原有工人  $45 - 3 = 42$ （名）。

### 铺垫2

已知： $a:b=1:2$ ， $b:c=3:4$ ，则 $a:b:c=$ \_\_\_\_\_。

**答案** 3:6:8

**解析** 略。

### 例题2

艾迪、薇儿、大宽给地主家做长工，已知艾迪和薇儿一个月的工资之比是1:2，薇儿和大宽一个月的工资之比是3:4。地主每个月给他们一共51元钱的工资，他们三个每人的工资应该是多少呢？

**答案** 艾迪9元，薇儿18元，大宽24元。

**解析** 薇儿是不变量，得到艾迪，薇儿，大宽三人工资的比为3:6:8，所以艾迪得到

$$51 \times \frac{3}{3+6+8} = 9\text{元}, \text{ 薇儿得到 } 51 \times \frac{6}{3+6+8} = 18\text{元}, \text{ 大宽得到 } 51 \times \frac{8}{3+6+8} = 24\text{元}.$$





PK对战

1 2016~2017学年广东广州天河区六年级上学期期末第2题2分

把一个平角按1:2分成两个角,其中较小的角度是( )。

- A.  $30^\circ$                       B.  $45^\circ$                       C.  $60^\circ$                       D.  $120^\circ$

答案 C

解析  $180 \times \frac{1}{1+2} = 60^\circ$ . 选C.

2 2017年北京海淀区海淀实验小学六年级上学期单元测试《六年级数学》第6题

小明



我家电视机长与宽的比是4:3

下面4种说法有( )个是正确的。

甲:小明家电视机宽与长的比是3:4.

乙:把长看作4份,宽就是3份.

丙:如果长是80cm,那么宽就是60cm.

丁:小明家电视机的长是宽的 $\frac{3}{4}$ .

- A. 4                      B. 3                      C. 2                      D. 1

答案 B

解析 小明家电视机的长是宽的 $\frac{4}{3}$ .

3 某农场有鸡,鸭,鹅共660只,已知鸡的只数与鸭的只数之比为2:1,鸭的只数与鹅的只数之比为3:2,则这个农场一共有多少只鸡?

- A. 234                      B. 344                      C. 360                      D. 256



答案 C

解析 因为已知鸡的只数与鸭的只数之比为 $2:1$ ，鸭的只数与鹅的只数之比为 $3:2$ ，所以鸡、鸭、鹅的只数比为 $6:3::2$ ；按比分配可知鸡有 $660 \div (6 + 3 + 2) \times 6 = 360$ （只）。

### 三、模块2 找不变量

#### 知识剖析

比例应用题中往往会有一些不变量，通常把不变量寻找出来，利用比的性质将不变量所表示的份数化成相同的份数，再利用份数思想解决问题。

#### 例题3

##### 解答题

- (1) 艾迪和薇儿身上的钱数之比为 $3:2$ ，妈妈又给艾迪4元钱后，艾迪与薇儿的钱数之比变成 $8:5$ ，则薇儿身上有多少钱？
- (2) 艾迪和薇儿原有的积分卡张数之比为 $8:7$ ，若艾迪给薇儿4张，则两人的张数之比将变成 $18:17$ ，则艾迪原有多少张？
- (3) 艾迪和薇儿家里的课外书之比为 $5:4$ ，大宽问艾迪和薇儿各借了5本课外书后，艾迪和薇儿的课外书之比变成了 $9:7$ ，则艾迪和薇儿原来的课外书共有多少本？

答案 (1) 40元。

(2) 112张。

(3) 90本。

解析 (1) 法1：不变量的第一种情况，单量不变。艾迪得到4元钱后，薇儿的钱数不改变。因此可以统一薇儿的钱数。 $[2, 5] = 10$ ， $3:2 = 15:10$ ； $8:5 = 16:10$ ，即 $16 - 15 = 1$ 份为4元。薇儿有10份，所以薇儿有 $10 \times 4 = 40$ (元)。

法2：出现两个比的应用题中，将一个比设成未知数，利用另一个比列出比例方程是一种万能的方法。

设艾迪原来的钱数为 $3x$ 元。则薇儿的钱数为 $2x$ 元。



$$\frac{3x+4}{2x} = \frac{8}{5}, \text{ 解得 } x = 20, \text{ 因此薇儿的钱数为 } 2 \times 20 = 40(\text{元}).$$

(2) 法1: 一个人给另一个人, 则总数不变. 开始时, 两人共  $8 + 7 = 15$  份, 而之后变成  $18 + 17 = 35$  份. 前后份数统一到  $[15, 35] = 105$  份. 则  $8 : 7 = 56 : 49$ ;  $18 : 17 = 54 : 51$ . 发现艾迪少了  $56 - 54 = 2$  份, 这2份就是4张, 因此1份是2张, 艾迪原有56份, 即原有  $56 \times 2 = 112$ (张).

法2:

设艾迪原有  $8x$  张, 则薇儿原有  $7x$  张.

$$\frac{8x-4}{7x+4} = \frac{18}{17}$$

解得:  $x = 14$

因此艾迪原有  $14 \times 8 = 112$ (张).

(3) 法1: 两人都减少了5本, 差不变. 原来两人的份数差为  $5 - 4 = 1$  份. 后来变成  $9 - 7 = 2$  份.  $[1, 2] = 2$ , 将  $5 : 4$  变成  $10 : 8$ , 可看出前后两人都减少了  $10 - 9 = 1$  份. 即1份为5本. 两人原有课外书为:  $(10 + 8) \times 5 = 90$  (本).

法2: 设艾迪和薇儿原有  $5x$  和  $4x$  本课外书.

$$\frac{5x-5}{4x-5} = \frac{9}{7}, \text{ 解得 } x = 10. \text{ 因此两人原有 } (5 + 4) \times 10 = 90(\text{本}) \text{ 课外书.}$$

【教学提示】①常见的不变量: 例如乙变了, 但甲没变, 这是单量不变; 甲、乙同时增加或者减少相同的量, 那么它们的差不变; 甲的一部分转移给乙, 那么它们的和不变. 利用不变量来统一两个比, 最后利用“量份对应”思想求解.

②学完模块三如果还有时间, 老师可以用前面的题练习方程法: (I) 设艾迪原有  $3x$  元, 则薇儿有  $2x$  元.  $\frac{3x+4}{2x} = \frac{8}{5}$ , 解得  $x=20$ , 因此薇儿有  $2 \times 20 = 40$  (元). (II) 设艾迪原有  $8x$  张, 则薇儿原有  $7x$  张.  $\frac{8x-4}{7x+4} = \frac{18}{17}$ , 解得:  $x=14$ , 因此艾迪原有  $14 \times 8 = 112$  (张). (III) 设艾迪和薇儿原有  $5x$  和  $4x$  本课外书.  $\frac{5x-5}{4x-5} = \frac{9}{7}$ , 解得  $x=10$ , 因此两人原有  $(5 + 4) \times 10 = 90$  (本) 课外书.

### 补充1

袋子里红球与白球的数量之比是  $19 : 13$ . 放入若干只红球后, 红球与白球数量之比变为  $5 : 3$ ; 再放入若干只白球后, 红球与白球数量之比变为  $13 : 11$ . 已知放入的红球比白球少  $80$  只. 那么原来袋子里共有多少只球?



**答案** 960个 .

**解析** 根据第一次操作白球的数量不变, 把19 : 13改写成57 : 39, 5 : 3改写成65 : 39. 第二次操作相对于第一次操作红球数量不变, 把13 : 11改写成65 : 55, 这时我们可以看出, 经过两次操作后, 红球共增加了  $65 - 57 = 8$  份, 白球增加了  $55 - 39 = 16$  份. 原来红球有  $80 \div (16 - 8) \times 57 = 570$  个, 白球有  $80 \div (16 - 8) \times 39 = 390$  个. 两种球共  $570 + 390 = 960$  个.

#### 例题4

有甲乙两桶油, 称得它们的质量比是4 : 5, 将乙桶中的油倒入甲桶8千克后, 再称发现质量比变为8 : 7, 已知桶的质量都是10千克, 求原来两桶里面油 (不含桶) 的质量比.

**答案** 3 : 4

**解析** 变化前后两桶油的总质量不变, 把总份数统一得到  $4 : 5 = 20 : 25$ ,  $8 : 7 = 24 : 21$ , 因此乙倒入甲4份, 因此原来甲桶和油共重  $8 \div 4 \times 20 = 40$  千克, 乙桶和油共重  $40 \times \frac{5}{4} = 50$  千克. 所以两桶里面油的质量比为  $(40 - 10) : (50 - 10) = 3 : 4$ .

故答案为 : 3 : 4 .

#### 挑战1

有甲乙两桶油用完全一样的桶装着, 称得它们的总质量比为7 : 9, 现在两桶油都被用去了21千克, 两桶油剩下的总质量比为7 : 10, 已知原来两桶总油量是122千克, 求桶的质量是多少?

**答案** 11千克 .

**解析** 方法一: 变化前后两桶油的质量差不变, 把质量差份数统一得到  $7 : 9 = 21 : 27$ ,  $7 : 10 = 14 : 20$ , 所以都用去了7份, 所以原来称得的总质量是  $21 \div 7 \times (21 + 27) = 144$  千克, 所以桶的质量是  $(144 - 122) \div 2 = 11$  千克.



方法二：设原来甲桶油质量为 $7x$ 千克，乙桶油质量为 $9x$ 千克，则根据题意列方程：

$(7x - 21) : (9x - 21) = 7 : 10$ ，解得： $x = 9$ 。所以原来两桶油总质量是 $(7 + 9) \times 9 = 144$ 千克，所以桶的质量是 $(144 - 122) \div 2 = 11$ 千克。

【教学提示】同增同减差不变。

## 四、模块3 比例方程的应用

### 知识剖析

基本思路是合理设出未知数，以题目中的比例条件列出比例方程，通过“内项积等于外项积”将方程化为整式方程求解。

有些时候我们会遇到不定方程，做法与解普通比例方程类似，都是先利用比例的性质将其化为整式方程，再利用不定方程解法求解。

### 探索2

解比例方程： $(3x - 2) : 5 = (x + 4) : 4$ ， $x = \underline{\quad}$ 。

答案 4

解析 解：

$$\begin{aligned} (3x - 2) : 5 &= (x + 4) : 4 \\ 4(3x - 2) &= 5(x + 4) \\ 12x - 8 &= 5x + 20 \\ 12x - 5x &= 20 + 8 \\ 7x &= 28 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

### 铺垫3

甲乙两校参加数学竞赛的人数之比是 $7 : 8$ ，获奖人数之比是 $2 : 3$ ，两校各有 $320$ 人未获奖，那么两校参赛的学生共有多少人？（ ）

- A. 320                      B. 480                      C. 960                      D. 1280



**答案** C

**解析** 方法一： $7 - 2 = 5$ ， $8 - 3 = 5$ ，设甲乙两校分别有7份，8份人，

所以共有 $320 \div 5 \times (7 + 8) = 960$ 人。

方法二：设甲、乙两校参加数学竞赛的学生人数各有 $7x$ 人， $8x$ 人，

根据题意列方程得 $(7x - 320) : (8x - 320) = 2 : 3$ ，解得 $x = 64$ ，

两校参加人数为 $7x + 8x = 15x = 960$ 人。

### 例题5

甲、乙本月收入的钱数比是 $5 : 8$ ，甲、乙本月支出的钱数比是 $3 : 4$ ，甲节余240元，乙节余480元。甲本月收入多少元？

**答案** 600元。

**解析** 设甲、乙的收入分别是 $5x$ 元、 $8x$ 元，

则有比例方程 $(5x - 240) : (8x - 480) = 3 : 4$ ，

化简为整式方程 $3(8x - 480) = 4(5x - 240)$ ，解得 $x = 120$ ，

故甲本月收入 $120 \times 5 = 600$ （元）。

### 挑战2

艾迪和薇儿各有一些积分卡，开始艾迪和薇儿的积分卡张数之比为 $3 : 2$ ，后来薇儿丢了4张卡，于是艾迪又送给薇儿20张卡，这样两人的积分卡张数之比就变成了 $5 : 7$ 。请问原来两人各有多少张积分卡？

**答案** 艾迪60张，薇儿40张

**解析** 设艾迪原有 $3x$ 张，则薇儿原有 $2x$ 张。

根据丢卡和换卡之后的比例列出比例方程 $(3x - 20) : (2x - 4 + 20) = 5 : 7$ ，

由内项积等于外项积，化为整式方程 $7(3x - 20) = 5(2x - 4 + 20)$ ，解得 $x = 20$ ，



故艾迪原有  $20 \times 3 = 60$  张卡，薇儿原有  $20 \times 2 = 40$  张卡。

补充2

1 2016年浙江杭州小升初杭城排位赛数学训练营第51题

甲乙两车间人数之比是  $2:3$ ，如果从乙车间调10人到甲车间，两车间人数就相等。两车间原来各有多少人？

**答案** 原来甲车间有40人，乙车间有60人。

**解析** 设原来甲车间有  $2x$  人，乙车间有  $3x$  人。根据题意列出方程： $2x + 10 = 3x - 10$ ，解得  $x = 20$ ，  
甲： $2 \times 20 = 40$ （人），乙： $3 \times 20 = 60$ （人）。

2 艾迪有两盒围棋子，他经常把两盒棋子混合在一起玩，所以两盒棋子中黑白子个数不同。

现在第一盒中，黑白子个数比为  $9:10$ ，第二盒中，黑白子个数比是  $7:5$ 。薇儿将两盒棋子混合在一起，发现共有200枚棋子，且黑白子个数相同。问：原来第一盒中共有几枚棋子？

**答案** 152枚。

**解析** 方法一：设两盒棋子原来的个数比是  $19a:12b$ ，则有方程  $\begin{cases} 9a + 7b = 10a + 5b \\ 19a + 12b = 200 \end{cases}$ ，解得  $\begin{cases} a = 8 \\ b = 4 \end{cases}$ ，  
故原来第一盒中共有  $19 \times 8 = 152$ （枚）棋子。

方法二：抓不变量：本题利用的是差不变，由于黑白子的个数相同，所经第一盒黑子比白子少的应等于第二盒黑子比白子多的，即两盒黑白子的数量差相同。

将差量统一：第一盒  $9:10 = 18:20$ ，第二盒  $7:5$ ，共  $18 + 20 + 7 + 5 = 50$  份，第一盒有  $200 \div 50 \times 38 = 152$  枚。

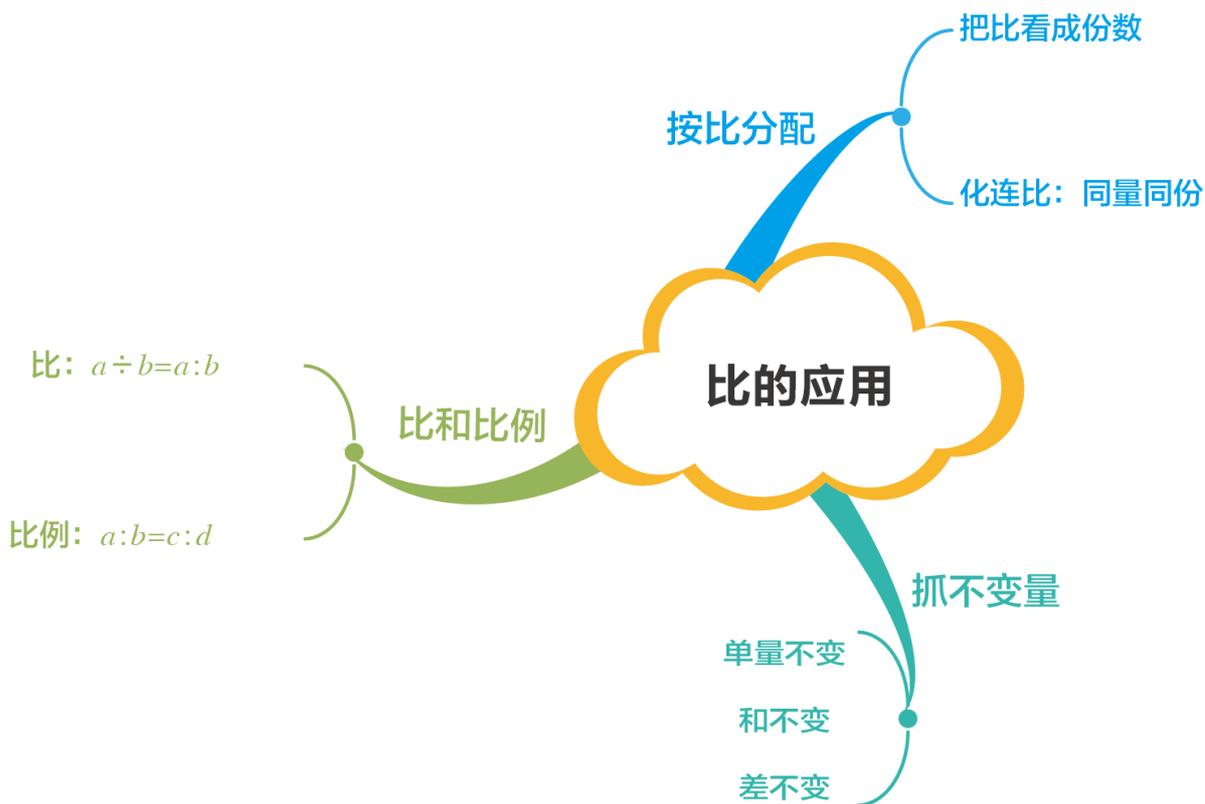
3 甲、乙、丙三名打字员一起录入一批文件，他们每分钟打字的数量比为  $12:14:15$ ，甲工作了5小时，乙工作了6小时，丙工作了4小时48分，最终他们共得到1080元的酬劳。请问甲乙丙三人应如何分配这1080元？



**答案** 300 ; 420 ; 360

**解析** 三人打字总数比为  $(12 \times 5) : (14 \times 6) : (15 \times 4.8) = 5 : 7 : 6$ ，所以甲应得  $1080 \times \frac{5}{5+7+6} = 300$  (元)；乙应得  $1080 \times \frac{7}{5+7+6} = 420$  (元)；丙应得  $1080 \times \frac{6}{5+7+6} = 360$  (元)。

**思维导图**



**我是小讲师**

给爸爸妈妈讲一讲，什么是“和不变”“差不变”，并说一说，在“和不变”“差不变”的过程中，比例关系是怎样变化的？

**答案** 见解析。

**解析** 教师重点关注孩子的操作与“和不变”“差不变”的要求是否匹配，以及是否能够讲解清楚，什么的和不变、什么的差不变，以及两种过程中，比例发生了怎样的变化。

**生活应用**

阿拉伯数学家花拉子米的遗嘱起拟于临终前，当时他的妻子正怀着他们的第一胎小孩。“如果妻子帮我生个儿子，儿子将继承三分之二的遗产，妻子将得到三分之一；如果是女儿，妻子将继承三分之二的遗产，女儿将得三分之一。”不幸的是，数学家在孩子出生前去世了。结果他的妻子生了一对龙凤胎，如何遵照数学家的遗嘱，将遗产分给他的妻子、儿子、女儿呢？



**答案** 妻子  $\frac{2}{7}$ ，儿子  $\frac{4}{7}$ ：女儿  $\frac{1}{7}$ 。

**解析** 根据遗嘱，儿子与妻子分得遗产的比例为2:1，妻子与女儿分得遗产的比例为2:1，化连比可知儿子、妻子、女儿分得遗产的比例为4:2:1，所以妻子应分得  $\frac{2}{7}$ ，儿子  $\frac{4}{7}$ ，女儿  $\frac{1}{7}$ 。

## 五、本讲巩固

1 艾迪、薇儿、大宽三人拥有的藏书数量之比为3:4:6，三人一共藏书52本，那么艾迪有 \_\_\_\_\_ 本，薇儿有 \_\_\_\_\_ 本，大宽有 \_\_\_\_\_ 本。

**答案** 1:12

2:16

3:24



**解析** 根据题意可知，一份书的数量： $52 \div (3 + 4 + 6) = 4$ （本），所以艾迪拥有的藏书数量为  $4 \times 3 = 12$ （本），薇儿拥有的藏书数量为  $4 \times 4 = 16$ （本），大宽拥有的藏书数量为  $4 \times 6 = 24$ （本）。

**2** 万泉小学的师生在植树节栽种柳树、杨树和槐树共860棵，其中柳树和杨树棵数的比为3:4，杨树与槐树棵数的比为5:2。那么柳树有 \_\_\_\_\_ 棵，杨树有 \_\_\_\_\_ 棵，槐树有 \_\_\_\_\_ 棵。

**答案** 1:300  
2:400  
3:160

**解析** 柳树、杨树、槐树棵树之比为15:20:8，  
柳树： $860 \times \frac{15}{15+20+8} = 300$ （棵）；  
杨树： $860 \times \frac{20}{15+20+8} = 400$ （棵）；  
槐树： $860 - 300 - 400 = 160$ （棵）。

**3** 爆爆和炸炸的邮票数量之比为3:4，后来炸炸又得到了12张，两人的邮票数量之比变为6:11，问两人原来共有 \_\_\_\_\_ 张邮票。

**答案** 56

**解析** 方程法：  
设爆爆和炸炸原有的邮票数量分别为 $3x$ 和 $4x$ 张，  
根据题意列出方程： $\frac{3x}{4x+12} = \frac{6}{11}$ ，解得 $x = 8$ ，  
故两人原来共有 $8 \times (3 + 4) = 56$ （张），  
答：两人原来共有56张。

## 六、基础过关



- 1 有小学生、中学生和大学生共432人参加国庆联欢晚会，他们的人数的比是4:3:2。那么参加联欢会的小学生有 \_\_\_\_\_ 人。

**答案** 192

**解析** 小学生有  $432 \times \frac{4}{4+3+2} = 192$  (人)。

- 2 请回答下列各题：

- (1) 艾迪、薇儿和大宽一共有300块糖，艾迪和大宽各送给薇儿3块糖之后，艾迪、薇儿和大宽三人糖数之比变为4:5:6，那么艾迪原来有 \_\_\_\_\_ 块糖，薇儿原来有 \_\_\_\_\_ 块糖，大宽原来有 \_\_\_\_\_ 块糖。
- (2) 艾迪、薇儿和大宽一共有321块糖，艾迪和大宽各吃掉3块糖之后，艾迪、薇儿和大宽三人糖数之比为4:5:6，那么艾迪原来有 \_\_\_\_\_ 块糖，薇儿原来有 \_\_\_\_\_ 块糖，大宽原来有 \_\_\_\_\_ 块糖。

**答案** (1) 1:83  
2:94  
3:123  
(2) 1:87  
2:105  
3:129

**解析** (1) 总糖数前后没变过，都是300块；最后三人的糖数分别为：

$$300 \times \frac{4}{4+5+6} = 80 \text{ (块)}, 300 \times \frac{5}{4+5+6} = 100 \text{ (块)}, 300 \times \frac{6}{4+5+6} = 120 \text{ (块)};$$

故原来三人的糖数分别是  $80 + 3 = 83$  (块)， $100 - 6 = 94$  (块)， $120 + 3 = 123$  (块)。

- (2) 薇儿的糖前后没变过，有  $(321 - 3 - 3) \times \frac{5}{4+5+6} = 105$  (块)，  
艾迪有  $(321 - 3 - 3) \times \frac{4}{4+5+6} + 3 = 87$  (块)，  
大宽有  $(321 - 3 - 3) \times \frac{6}{4+5+6} + 3 = 129$  (块)。



- 3 育才小学五年级700名学生分成三批去参观博物馆。第一批与第二批的人数比是5:4，第二批与第三批的人数比是3:2。请问：育才小学第二批去参观博物馆的有 \_\_\_\_\_ 人。

**答案** 240

**解析** 一、二、三批人数之比为15:12:8，所以育才小学第二批去参观博物馆的有  
 $700 \div (15 + 12 + 8) \times 12 = 240$ 人。

- 4 松鼠一家三口出门采摘松果，松鼠爸爸采得最快，他每采摘7颗松果，松鼠妈妈只能采摘6颗；松鼠宝宝采得最慢，他每采摘2颗，松鼠妈妈已经采摘了3颗。一天下来，他们一共采摘了340颗松果。试问：其中有 \_\_\_\_\_ 颗是松鼠宝宝采的。

**答案** 80

**解析** 设爸爸采了7份松果，妈妈采了6份松果。

根据宝宝和妈妈采的松果之比为2:3，宝宝采了  $6 \times \frac{2}{3} = 4$ 份。

三人共采了  $7 + 6 + 4 = 17$ 份。每份是  $340 \div 17 = 20$ 颗。

宝宝采了  $20 \times 4 = 80$ 颗。

## 七、能力提升

- 1 五年级甲乙两班人数比为3:2，甲班转给乙班3名同学后，两班人数比为4:3，问甲乙两班原来分别有 \_\_\_\_\_ ， \_\_\_\_\_ 人。

**答案** 1:63

2:42

**解析**



设原来甲班有 $3x$ 人，乙班有 $2x$ 人。根据题意列出方程： $(3x - 3) : (2x + 3) = 4 : 3$ ，解得 $x = 21$ ，故甲班原有 $3 \times 21 = 63$ （人），乙班原有 $2 \times 21 = 42$ （人）。

## 2 2011年北京小学高年级五年级竞赛

甲、乙两人原有的钱数之比为 $6 : 5$ ，后来甲又得到 $180$ 元，乙又得到 $30$ 元，这时甲、乙钱数之比为 $18 : 11$ 。那么原来两人的钱数之和为 \_\_\_\_\_ 元。

**答案** 660

**解析** 两人原有钱数之比为 $6 : 5$ ，如果甲得到 $180$ 元，乙得到 $150$ 元，那么两人的钱数之比仍为 $6 : 5$ ，现在甲得到 $180$ 元，乙只得到 $30$ 元，相当于少得到了 $120$ 元，现在两人钱数之比为 $18 : 11$ ，可以理解为：两人的钱数分别增加 $180$ 元和 $150$ 元之后，钱数之比为 $18 : 15$ ，然后乙的钱数减少 $120$ 元，两人的钱数之比变为 $18 : 11$ ，所以 $120$ 元相当于 $4$ 份， $1$ 份为 $30$ 元，后来两人的钱数之和为 $30 \times (18 + 15) = 990$ 元，所以原来两人的总钱数之和为 $990 - 180 - 150 = 660$ 元。

设甲、乙原来各有 $6x$ 、 $5x$ 元，那么有 $(6x + 180) : (5x + 30) = 18 : 11$ ，解比例方程得 $x = 60$ ，原来共有 $60 \times (6 + 5) = 660$ （元）。

由于甲、乙得到的钱数不同，所以差并非不变。为了让得到的钱数相同，可以考虑将乙原有的钱数和得到的钱数都翻 $6$ 倍，那么甲、乙原有钱数之比变为 $1 : 5$ ，现有钱数之比变为 $3 : 11$ ，统一差，变为 $2 : 10$ 以及 $3 : 11$ ，一份就是 $180$ 元，所以原有钱数之和为 $(2 + 10 \div 6) \times 180 = 660$ 。

故答案为：660元。

3 艾迪和薇儿各有一些糖，原来艾迪与薇儿的糖数之比为 $4 : 3$ 。后来艾迪吃掉了 $20$ 块糖，薇儿买了 $40$ 块糖，这样艾迪与薇儿的糖数之比就变为 $3 : 5$ 了。那么艾迪、薇儿原来分别有 \_\_\_\_\_ ， \_\_\_\_\_ 块糖。

**答案** 1:80

2:60

**解析**



设艾迪原有 $4x$ 块糖，则薇儿原有 $3x$ 块糖，有比例方程 $(4x - 20) : (3x + 40) = 3 : 5$ ，内项积等于外项积，化为整式方程 $(4x - 20) \times 5 = 3 \times (3x + 40)$ ，解得 $x = 20$ ，故艾迪原有80块糖，薇儿原有60块糖。

## 八、创新挑战

水池中插了甲、乙、丙三根竖直的柱子，刚开始甲、乙、丙三根柱子露在水面上的部分长度之比为 $5 : 8 : 9$ ，水面上升一定高度后，甲、乙两根柱子水上长度之比变为 $3 : 5$ ，如果水面再上升相同的高度，三根柱子水上长度之比变为 \_\_\_\_\_ : \_\_\_\_\_ : \_\_\_\_\_ 。

**答案** 1:4

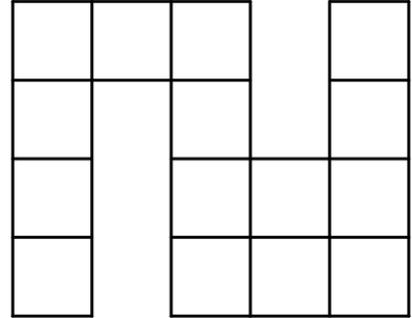
2:7

3:8

**解析** 本题属于差不变，不变量为柱子的水上长度差，统一水面变化前后柱子的水上长度差。上升前水面上的长度比 $5 : 8 : 9 = 10 : 16 : 18$ ，上升一定高度后变为 $3 : 5 = 9 : 15$ ，说明水面高度上升了 $10 - 9 = 1$ 份，如果再上升1份，就变为 $(10 - 2) : (16 - 2) : (18 - 2) = 8 : 14 : 16 = 4 : 7 : 8$ 。

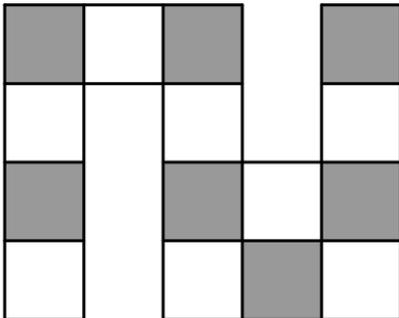
## 2020五秋4~6讲阶段复习 B版

1 将下面的图形的方格染上黑白两色，要求黑色之间不相邻，白色之间不相邻，并且计算黑白两色方格数目相差 \_\_\_\_\_ 格。

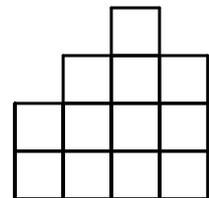


答案 1

解析 将图进行国际棋盘式的染色，如图：



2 下图 \_\_\_\_\_（填能或不能）用  形方块恰好覆盖？

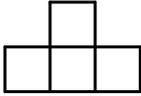
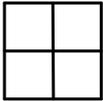


答案 不能

解析 将图形黑白染色后，黑色块和白色块数量不相同，所以不能。



3

用15个  和1个  能否覆盖国际象棋棋盘？（图形可以旋转、翻转）（ ）。

A. 能

B. 不能

**答案** B

**解析** 将棋盘进行黑白相间染色，一个T字型可以盖住3黑1白或者3白1黑，方块只能盖住2白2黑，故无法完全覆盖。

4

计算： $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

**答案**  $\frac{5}{4}$

**解析** 原式 =  $\frac{3}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{5}{4}$ 。

5

计算：

(1)  $2\frac{5}{8} - \frac{2}{3} \times 2\frac{5}{14} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2)  $\left(3\frac{1}{12} + 4.375\right) \div 19\frac{8}{9} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

**答案** (1)  $\frac{59}{56}$   
(2)  $\frac{3}{8}$

**解析** (1) 原式  

$$= \frac{21}{8} - \frac{2}{3} \times \frac{33}{14}$$

$$= \frac{21}{8} - \frac{11}{7}$$

$$= \frac{59}{56}$$

(2) 原式  

$$= \left(\frac{37}{12} + \frac{35}{8}\right) \div \frac{179}{9}$$



$$= \frac{179}{24} \times \frac{9}{179}$$

$$= \frac{3}{8} .$$

6 计算： $7\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} - 4.5 \div \frac{5}{3} = \underline{\hspace{2cm}}$  .

**答案** 1.8

备选答案： $\frac{9}{5}$

**解析**

$$7\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} - 4.5 \div \frac{5}{3}$$

$$= 7.5 \times \frac{3}{5} - 4.5 \times \frac{3}{5}$$

$$= (7.5 - 4.5) \times \frac{3}{5}$$

$$= 3 \times \frac{3}{5}$$

$$= 1.8 .$$

7  $\frac{9}{10} \div \left[ \frac{1}{2} \times \left( \frac{6}{5} - \frac{3}{10} \right) \right] = \underline{\hspace{2cm}}$  .

**答案** 2

**解析**

$$\text{原式} = \frac{9}{10} \div \left( \frac{1}{2} \times \frac{9}{10} \right)$$

$$= \frac{9}{10} \div \frac{9}{20}$$

$$= \frac{9}{10} \times \frac{20}{9}$$

$$= 2$$

8 甲乙之和为160，已知甲：乙=5：11，那么甲是  $\underline{\hspace{2cm}}$  .

**答案** 50

**解析**

$$160 \times \frac{5}{5+11} = 50 .$$

故答案为：50 .



9 某校六年级一共有420个人，男生人数之比是13 : 8，那男生比女生多（ ）人。

- A. 260                      B. 160                      C. 100                      D. 120

**答案** C

**解析** 把男生看成13份，女生看成8份，一份是 $420 \div (13 + 8) = 20$ （人），男生比女生多 $20 \times (13 - 8) = 100$ （人）。

10 彭风同学手中一共有108颗玻璃珠，有红、黄、蓝三种颜色，这三种颜色的玻璃珠的颗数比是1 : 2 : 3，那么他手中红、黄、蓝三种颜色的玻璃珠分别有 \_\_\_\_\_ 颗、 \_\_\_\_\_ 颗、 \_\_\_\_\_ 颗。

**答案** 1:18

2:36

3:54

**解析** 把红、黄、蓝这三种颜色的玻璃珠的颗数分别看作1份，2份，和3份，108颗一共是（1 + 2 + 3）份，用108除以总份数求出一份的数量，即红玻璃珠的颗数，再用一份的颗数乘2是黄玻璃珠的颗数，用一份的颗数乘3是蓝玻璃珠的颗数。

$$108 \div (1 + 2 + 3)$$

$$= 108 \div 6$$

$$= 18 \text{（颗）,}$$

$$18 \times 2 = 36 \text{（颗）,}$$

$$18 \times 3 = 54 \text{（颗）.}$$

答：他手中红、黄、蓝三种颜色的玻璃珠分别有18颗、36颗、54颗。

故答案为：18，36，54。



## 第7讲 四边形中的面积关系 B版

### 一、预习

#### 1. 课前热身

##### 1 2013年天津红桥区小升初

小明家里的菜地共960平方米，按照5 : 3的面积比种植黄瓜和茄子，茄子比黄瓜少种（ ）平方米。

- A. 120                      B. 240                      C. 360                      D. 600

**答案** B

**解析**  $960 \times \left( \frac{5}{8} - \frac{3}{8} \right) = 240$  (平方米)。

2 超市原有的咖啡和奶粉数量比为5 : 7，今天进货40箱咖啡后，咖啡和奶粉的数量比变为7 : 9，问现在的咖啡有（ ）箱。

- A. 450                      B. 490                      C. 630                      D. 5

**答案** B

**解析** 设咖啡原来的数量为 $5x$ ，则奶粉的数量为 $7x$ ，由题意，列出方程 $\frac{5x+40}{7x} = \frac{7}{9}$ ，解得 $x = 90$ ，则现在咖啡数量为 $5x + 40 = 490$ 。

##### 3 小升初

六年级两个班共有学生92人，如果从六（1）班调8人到六（2）班，那么（1）班和（2）班人数的比是10 : 13，两个班原来各有多少人？

- A. 48人，43人              B. 48人，44人              C. 49人，43人              D. 49人，44人

**答案** B

**解析** 调整后，两班人数分别是  $92 \times \frac{10}{10+13} = 40$  (人) 和  $92 \times \frac{13}{10+13} = 52$  (人) . 调整前为  $40 + 8 = 48$  (人) 和  $52 - 8 = 44$  (人) .

## 2. 知识GPS

### 本讲内容 (图形认知能力)

研究任意四边形中被对角线所分的三角形之间的面积关系

### 前铺知识

三角形的面积公式；等高的两个三角形的面积关系

### 后续知识

研究梯形中被对角线所分的三角形之间的面积关系

**课内衔接**：北师大版 五年级上册第2单元 图形的面积 (一)

### 教学目标

掌握风筝模型的基本原理

应用风筝模型解决相关的几何问题

### 教学重点

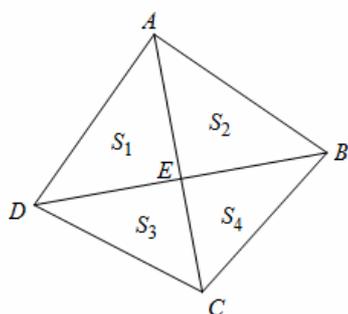
风筝模型的基本原理

### 教学难点

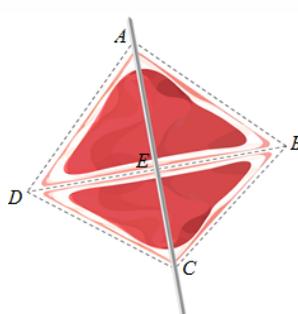
复杂图形中求解三角形面积

## 3. 板书设计

**风筝模型：**



**“烤串模型”：**





等高结论： $\frac{S_1}{S_3} = \frac{S_2}{S_4} = \frac{AE}{EC}$  “将两个三角形看成两片肉”

风筝结论： $\frac{S_1 + S_2}{S_3 + S_4} = \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CBD}} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow$  两片肉的面积之比=穿过肉片的签子长度之比

## 4. 教学说明

模块一：风筝模型

【探索】等高模型的应用

【例1】引出风筝模型

【例2】风筝模型的简单应用

【例3】风筝模型的应用：求面积，求边之比

模块二：构造风筝模型

【例4】正方形内部的风筝模型

【例5】正方形内部的风筝模型

【挑战1】正方形内部的复杂风筝模型

【挑战2】三角形内部的风筝模型

## 5. 追本溯源

草长莺飞二月天，拂堤杨柳醉春烟。儿童放学归来早，忙趁东风放纸鸢。

小朋友们，你们听过这首诗吗？那诗中的纸鸢指的又是什么呢？

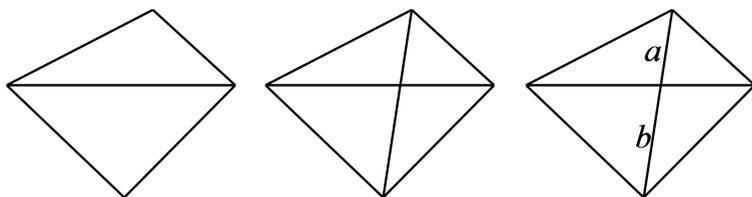
**答案** 在风和日丽的天气里，放风筝是个好消遣，到场地上一看，有放风筝的，也有被风筝放的。额，好吧，今天不讨论放风筝的技巧。就谈谈风筝的基本结构，一个平平无奇的四边形，简约而不简单，我们都知道风筝上得有面儿，这个面儿要么是布，要么是纸，但最最核心的部件，还是风筝中的“骨架”就是这两条一横一竖交叉拼接的辐条，没有它们风筝根本撑不起来，更别说放飞了。巧的是，和这种风筝长得一样的四边形，也有类似的骨架，不过在四边形里，它们有新的专业名称——对角线，四边形一共两条对角线，也撑起了四边形最基本的结构。

## 二、模块1 风筝模型



**知识剖析**

1. 风筝模型：



两个共底、呈风 连接两个顶点， 两个三角形面积之比  
 筝状的三角形 连线被分成两段 即为两条线段长度之比

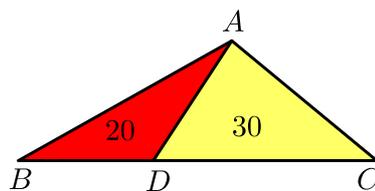
2. 适合使用风筝模型解题的题目特点：

给出了图形边界上的分点位置，求图形内部的连线交点在其所在线段的分比，适合使用风筝模型。

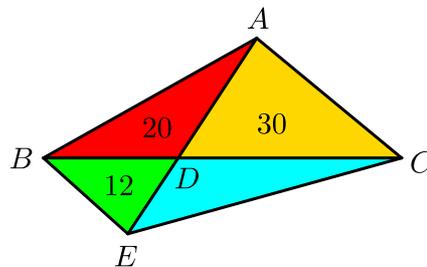
**探索**

请回答下列各题：

(1) 如图，三角形 $ABC$ 中，两个小三角形的面积分别为20、30，那么 $BD : DC =$  \_\_\_\_\_  
 : \_\_\_\_\_ .



(2) 延长上图中的线段 $AD$ 至 $E$ ，连接 $EB$ 、 $EC$ ，已知其中3个三角形的面积，那么三角形 $CDE$ 的面积是 \_\_\_\_\_ .



**答案** (1) 1:2

2:3

(2) 18

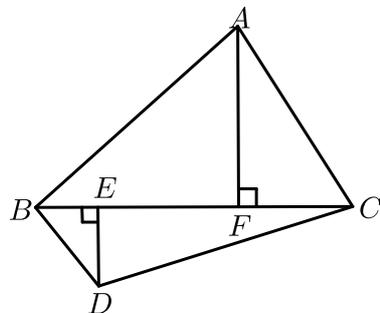
**解析** (1)  $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ , 所以  $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$ .

(2)  $\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle EDC}} = \frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$ , 所以  $S_{\triangle CDE} = 12 \div 2 \times 3 = 18$ .

**【教学提示】** 复习等高模型. 从本题中可以提炼出一个结论, 即四边形中, 四个小三角形的面积满足交叉相乘积相等, 可知三求一.

**铺垫1**

如图, 已知三角形  $ABC$  的面积为 60,  $AF : ED = 5 : 2$ , 则三角形  $BCD$  的面积是多少?

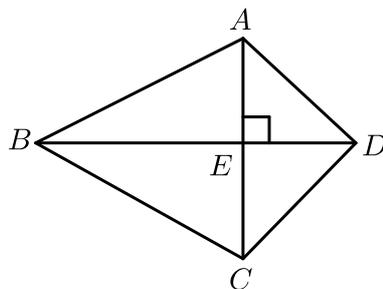


**答案** 24

**解析** 底相同, 面积之比等于高之比.

**例题1**

1 如图, 已知四边形  $ABCD$  的面积为 80,  $AE : EC = 3 : 5$ , 则三角形  $BCD$  的面积是多少?

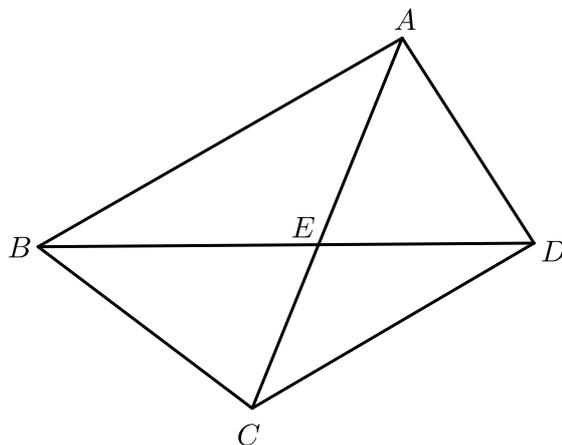


**答案**



**解析** 底相同，面积之比等于高之比。

2 如图，已知四边形  $ABCD$  的面积为 90， $AE:EC = 5:4$ ，则三角形  $BCD$  的面积是多少？



**答案** 40。

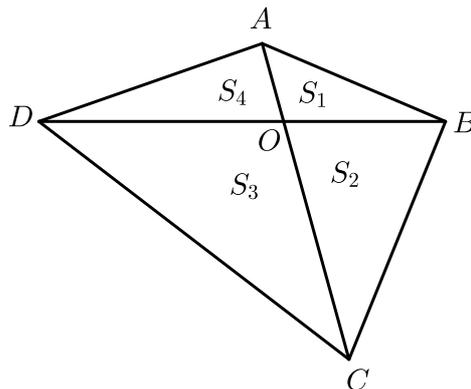
**解析**  $AE$ 、 $CE$  可以看成三角形的“假高”（都是从顶点到底边连线，且两条“高”共线），证明可以用等比定理，也可将面积用字母表示，提公因数后字母抵消。

【教学提示】本题从等底模型入手，通过类比让学生大胆猜想两个三角形的面积关系，使得学生对风筝模型有一个初步的认识，但证明仍需使用等高模型。

例题2

1 四边形  $ABCD$  中， $AC$  与  $BD$  相交于  $O$  点； $OA$ 、 $OB$ 、 $OC$ 、 $OD$  的长度分别为 1、2、3、4。

$S_{\triangle ADB} : S_{\triangle CDB} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $S_{\triangle ADC} : S_{\triangle ABC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（ ）





A. 1 : 3

B. 3 : 1

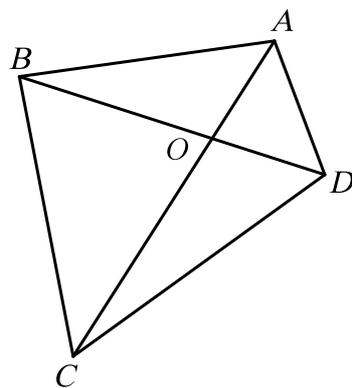
C. 2 : 1

D. 1 : 2

**答案** AC

**解析** 略.

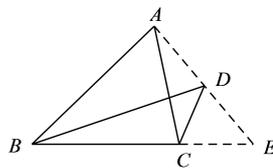
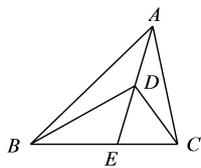
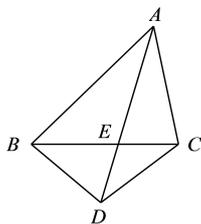
2 如图, 在四边形  $ABCD$  中, 已知  $BO : OD = 3 : 2$ ,  $S_{\triangle ABC} = 51\text{cm}^2$ , 求三角形  $DAC$  的面积.



**答案**  $34\text{cm}^2$ .

**解析**  $51 \div 3 \times 2 = 34\text{cm}^2$ .

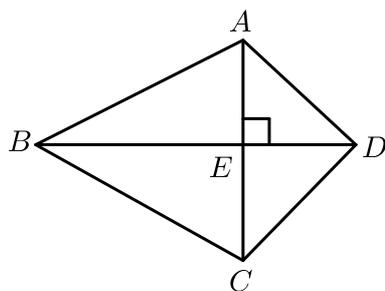
【风筝模型的拓展】



若左图中  $\triangle BCD$  与  $\triangle ABC$  在  $BC$  的同一侧, 就变成中图, 若顶点  $D$  在  $\triangle ABC$  之外, 就变成右图, 这三个图都满足:  $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle DBC} = AE : DE$ . 这里  $AE$ 、 $DE$  都可以看成“假高”.

**PK** 对战

1 如图, 已知四边形  $ABCD$  的面积为 60,  $BE : ED = 2 : 1$ , 则三角形  $ACD$  的面积是多少?



A. 20

B. 30

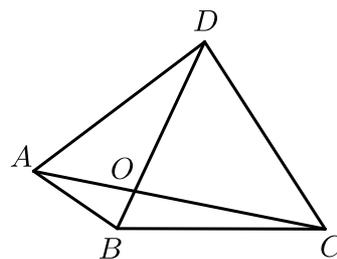
C. 40

D. 50

**答案** A

**解析** 底相同，面积之比等于高之比。

2 下图中， $AO : OC = 2 : 3$ ， $BO : OD = 1 : 4$ ，三角形ACD的面积是20，求三角形ABC的面积（ ）。



A. 5

B. 10

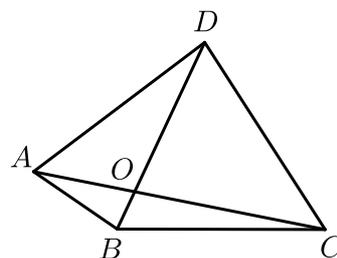
C. 15

D. 20

**答案** A

**解析** 50

3 下图中， $AO : OC = 2 : 3$ ， $BO : OD = 1 : 4$ ，三角形ABD的面积是20，求三角形BCD的面积（ ）。





A. 30

B. 40

C. 60

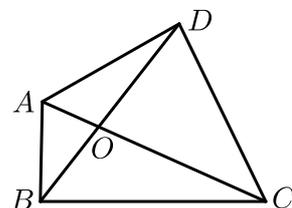
D. 80

答案 A

解析 30

### 例题3

在四边形 $ABCD$ 中, 已知 $\angle ABC$ 为直角,  $AB = 5$ ,  $BC = 12$ , 连接对角线 $AC$ ,  $BD$ , 相交于点 $O$ , 并且 $AO = 3$ ,  $OC = 10$ ,  $\triangle ABD$ 的面积为18. 求:



(1)  $\triangle BCD$ 的面积;

(2)  $BO : OD$ .

答案 (1) 60.

(2) 5 : 8.

解析 (1) 根据风筝模型,  $S_{\triangle ABD} : S_{\triangle BCD} = AO : OC = 3 : 10$ , 那 $S_{\triangle BCD} = 18 \div 3 \times 10 = 60$ .

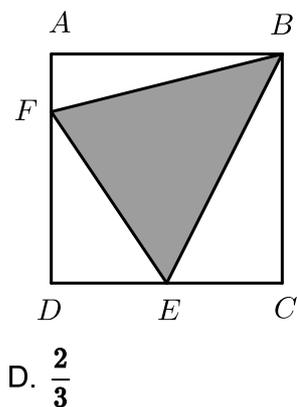
(2) 四边形的面积是 $60 + 18 = 78$ , 而 $S_{\triangle ABC} = 5 \times 12 \div 2 = 30$ , 所以

$S_{\triangle ADC} = 78 - 30 = 48$ , 根据风筝模型,  $BO : DO = 30 : 48 = 5 : 8$ .

## 三、模块2 构造风筝模型

### 铺垫2

正方形 $ABCD$ 的边长为1, 点 $E$ 为 $CD$ 边上的中点, 点 $F$ 为 $AD$ 边上靠近 $A$ 的三等分点, 求三角形 $BEF$ 的面积( ).



A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{5}{12}$

C.  $\frac{7}{12}$

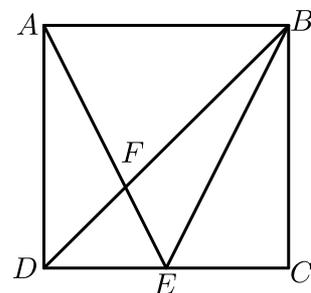
D.  $\frac{2}{3}$

**答案** B

**解析** 整体减空白： $1 - \frac{1}{3} \times 1 \div 2 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \div 2 - \frac{1}{2} \times 1 \div 2 = \frac{5}{12}$ 。  
 故选B。

**例题4**

正方形ABCD中，点E是DC边的中点，求AF:FE = ( )。



A. 5:3

B. 4:3

C. 3:2

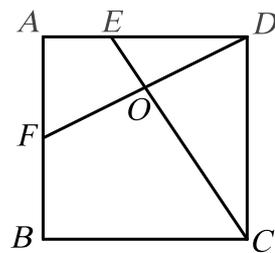
D. 2:1

**答案** D

**解析**  $AF:FE = S_{\triangle DAB} : S_{\triangle DEB}$ ， $S_{\triangle DAB} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ ， $S_{\triangle DEB} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$ ，所以  
 $AF:FE = \frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 2:1$ 。

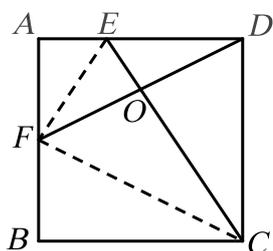
**例题5**

如图：正方形ABCD中，DE = 2AE，F是AB中点，CE、DF相交于点O，那么EO:OC = \_\_\_\_\_（请写出最简整数比）。



**答案** 1:3

**解析** 连接CF, EF, 根据风筝模型,  $EO:OC = S_{\triangle DEF} : S_{\triangle CDF}$ . 易见  $S_{\triangle CDF} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ , 而  $S_{\triangle DEF} = \frac{1}{6}S_{ABCD}$ , 故  $EO:OC = S_{\triangle DEF} : S_{\triangle CDF} = \frac{1}{6} : \frac{1}{2} = 1:3$ .



**捉虫时刻**

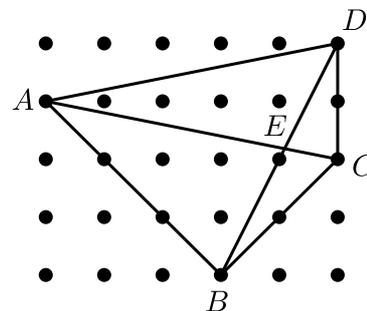
如图, 水平或竖直方向相邻两点之间的距离为1, 求  $AE:EC$ .

马小虎的解题过程如下, 他做的对吗? 请你帮他挑挑错吧!

解: 三角形ADC的面积为  $2 \times 5 \div 2 = 5$ ,

三角形ABC的面积为  $3 \times 5 - \frac{3 \times 3}{2} - \frac{1 \times 5}{2} - \frac{2 \times 2}{2} = 15 - 9 = 6$ ,

所以  $AE:EC = 5:6$ .



**答案** 错, 9:2.

**解析** 马小虎求的比是DE与EB之比,

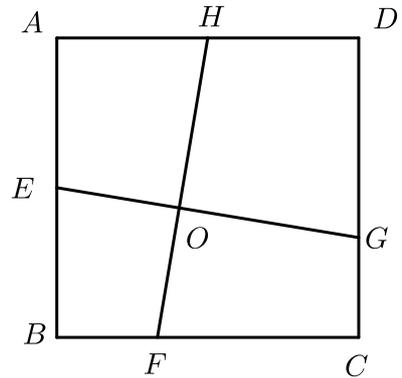


$$AE : EC = S_{\triangle ADB} : S_{\triangle CDB}$$

$$= \left( 4 \times 5 - \frac{3 \times 3}{2} - \frac{1 \times 5}{2} - \frac{2 \times 4}{2} \right) : \frac{2 \times 2}{2} = 9 : 2 .$$

挑战1

如图，正方形  $ABCD$  中，边长为12， $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$  分别是  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $DA$  上的点。  
 $AH = HD$ ， $DG = 2GC$ ， $CF = 2FB$ ， $BE = EA$ 。  $EG$ 、 $FH$  相交于点  $O$ ，那么  $EO : OG =$   
 \_\_\_\_\_ : \_\_\_\_\_（请写出最简整数比）。



答案 15 : 22

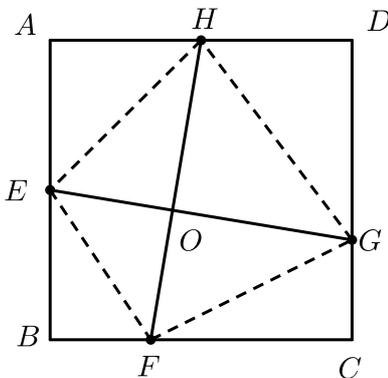
解析 连接  $EF$ 、 $FG$ 、 $GH$ 、 $HE$ ，根据风筝模型，

$$EO : OG = S_{\triangle EFH} : S_{\triangle GFH} = (S_{\triangle ABFH} - S_{\triangle EBF} - S_{\triangle EAH}) : (S_{\triangle HDCF} - S_{\triangle GDH} - S_{\triangle GCF})$$

$$= [(6 + 4) \times 12 \div 2 - 4 \times 6 \div 2 - 6 \times 6 \div 2] : [(6 + 8) \times 12 \div 2 - 6 \times 8 \div 2 - 4 \times 8 \div 2]$$

$$= 30 : 44$$

$$= 15 : 22$$



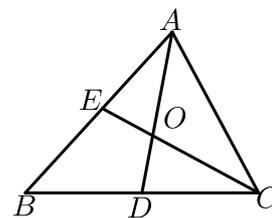
挑战2



回答下列问题 .

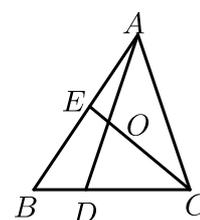
(1)  $\triangle ABC$  中,  $D$  是  $BC$  中点,  $E$  是  $AB$  中点,

则  $AO : OD = \underline{\quad} : \underline{\quad}$  ;  $EO : OC = \underline{\quad} : \underline{\quad}$  .



(2)  $\triangle ABC$  中,  $D$  是  $BC$  上的三等分点,  $E$  是  $AB$  的中点,

则  $AO : OD = \underline{\quad} : \underline{\quad}$  ;  $EO : OC = \underline{\quad} : \underline{\quad}$  .



**答案** (1) 1:2

2:1

3:1

4:2

(2) 1:3

2:2

3:1

4:4

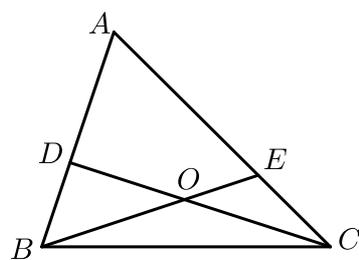
**解析** (1) 连接  $ED$ , 则  $AO : OD = S_{\triangle AEC} : S_{\triangle DEC}$ ,  $EO : OC = S_{\triangle AED} : S_{\triangle ACD}$  .

(2) 连接  $ED$ , 则  $AO : OD = S_{\triangle AEC} : S_{\triangle DEC}$ ,  $EO : OC = S_{\triangle AED} : S_{\triangle ACD}$  .

**【教学提示】** 可继续练习求  $FO : OH$  .  $FO : OH = S_{\triangle EFG} : S_{\triangle EHG} = 32 : 42 = 16 : 21$  .

**随堂练**

已知  $\triangle ABC$  中,  $AD : DB = 3 : 2$ ,  $AE = 2EC$ , 则  $BO : OE = \underline{\quad} : \underline{\quad}$  ;  $DO : OC = \underline{\quad} : \underline{\quad}$  .



**答案** 1:2

2:1

3:4

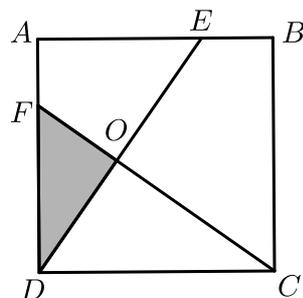
4:5

**解析** 连接ED, 则  $BO : OE = S_{\triangle BDC} : S_{\triangle DEC}$ ,  $DO : OC = S_{\triangle BED} : S_{\triangle BCE}$ .

故答案为: 2:1; 4:5.

**补充**

1 如图, 在边长为8的正方形ABCD中,  $AE : EB = 3 : 1$ ,  $DF : FA = 3 : 1$ , 请问阴影部分的面积是多少?



**答案**  $\frac{216}{25}$ .

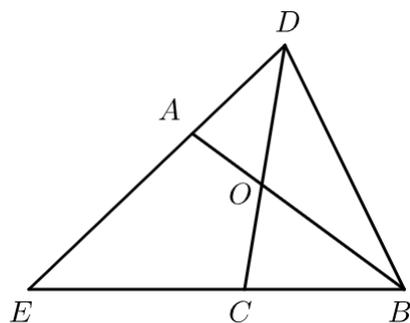
**解析** 连接CE, EF,  $S_{\triangle CDE} = 8 \times 8 \div 2 = 32$ ,  $S_{\triangle DEF} = 6 \times 6 \div 2 = 18$ ; 根据风筝模型, 有

$FO : OC = S_{\triangle DEF} : S_{\triangle CDE} = 18 : 32 = 9 : 16$ , 所以

$$S_{\triangle ODF} = S_{\triangle CDF} \times \frac{9}{16+9} = 8 \times 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{9}{25} = \frac{216}{25}.$$



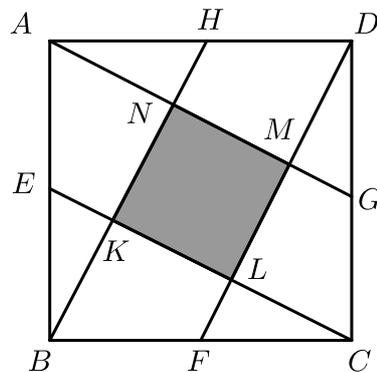
2 如图，线段  $AB$  与线段  $CD$  相交于点  $O$ ，已知  $OA:OB = 1:2$ ， $OC:OD = 3:4$ ，求  $AE:DE$



**答案** 9:14 .

**解析** 连接  $AC$ ，则根据风筝模型， $S_{\triangle ACB} : S_{\triangle ADB} = OC : OD = 3 : 4$ ，即  $S_{\triangle ACB} = \frac{3}{7} S_{\triangle ABCD}$ ；  
 $S_{\triangle DCB} : S_{\triangle DCA} = OB : OA = 2 : 1$ ，即  $S_{\triangle DCB} = \frac{2}{3} S_{\triangle ABCD}$ ；故  $S_{\triangle ACB} : S_{\triangle DCB} = \frac{3}{7} : \frac{2}{3} = 9 : 14$ ，  
 故  $AE : DE = 9 : 14$  .

3 如下图，面积为1的正方形  $ABCD$  中， $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$  分别是  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $DA$  的中点，连接  $AG$ 、 $BH$ 、 $CE$ 、 $DF$ ，中心部分会形成四边形  $KLMN$  . 求四边形  $KLMN$  的面积 .

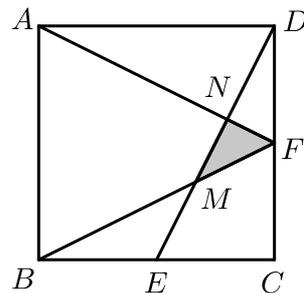


**答案**  $\frac{1}{5}$  .

**解析** 连接  $AF$ 、 $GF$ ，在四边形  $AFGD$  中，  
 $AM : MG = S_{\triangle AFD} : S_{\triangle GFD} = \frac{1}{2} : \frac{1}{8} = 4 : 1$ ，  
 所以  $S_{\triangle AMD} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{1+4} = \frac{1}{5}$ ， $S_{KLMN} = 1 - \frac{1}{5} \times 4 = \frac{1}{5}$  .



- 4 如图，正方形  $ABCD$  的面积为1， $E$ 、 $F$  分别是  $BC$  和  $CD$  的中点， $DE$  与  $BF$  相交于  $M$  点， $DE$  与  $AF$  相交于  $N$  点，那么阴影三角形  $MFN$  的面积是多少？



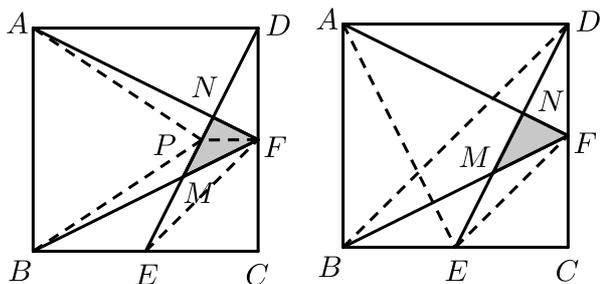
**答案**  $\frac{1}{30}$

**解析** 观察图形可知本题应运用鸟头模型求解，其中由一半模型易知  $S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2}$ ，点  $M$ 、 $N$  在  $BF$ 、 $AF$  上的具体位置的求法有如下两种方法：

法1（蝴蝶模型）：正方形的面积是1，故其边长为1；如下左图，过  $F$  点作  $AD$  的平行线交  $DE$

与点  $P$ ，连接  $AP$ 、 $BP$ 、 $EF$ ，易见  $PF = \frac{1}{2}EC = \frac{1}{4}$ ；根据梯形蝴蝶模型，在梯形  $PFEB$  中， $\frac{MF}{MB} = \frac{PF}{EB} = \frac{1}{2}$ ，故  $\frac{FM}{FB} = \frac{1}{3}$ ；同理，在梯形  $PFAD$  中， $\frac{NF}{NA} = \frac{PF}{DA} = \frac{1}{4}$ ，故  $\frac{FN}{FA} = \frac{1}{5}$ ；

法2（风筝模型）：如下右图，连接  $EF$ 、 $BD$ 、 $AE$ ，则易求  $S_{\triangle DEF} = \frac{1}{8}$ ， $S_{\triangle DEB} = \frac{1}{4}$ ， $S_{\triangle DEA} = \frac{1}{2}$ ；由风筝模型可知： $\frac{MF}{MB} = \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle DEB}} = \frac{1}{2}$ ， $\frac{NF}{NA} = \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle DEA}} = \frac{1}{4}$ ，故  $\frac{FM}{FB} = \frac{1}{3}$ ， $\frac{FN}{FA} = \frac{1}{5}$ ；



之后再使用鸟头模型， $\frac{S_{\triangle FMN}}{S_{\triangle FBA}} = \frac{FM}{FB} \times \frac{FN}{FA} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$ ，故  $S_{\triangle FMN} = \frac{1}{15} S_{\triangle ABF} = \frac{1}{30}$ 。

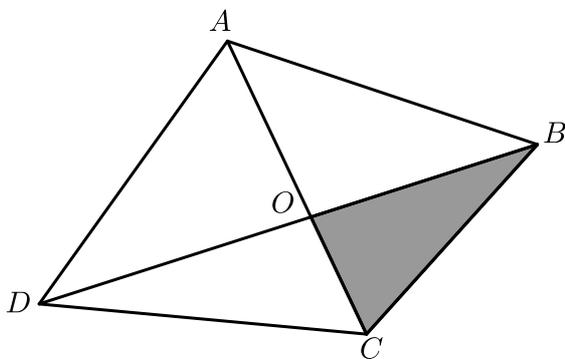
**思维导图**



我是小讲师

如图，四边形 $ABCD$ 中，对角线 $AC$ 与 $BD$ 相交于点 $O$ ，已知 $\triangle ADO$ 面积为15， $AO : OC = 3 : 2$ ，四边形 $ABCD$ 的面积为60。

请你用上课所学的知识，分别求出三角形 $ABD$ 与三角形 $BCD$ 的面积，最后再求出三角形 $OBC$ 的面积。给爸爸妈妈讲讲你是怎么做的。



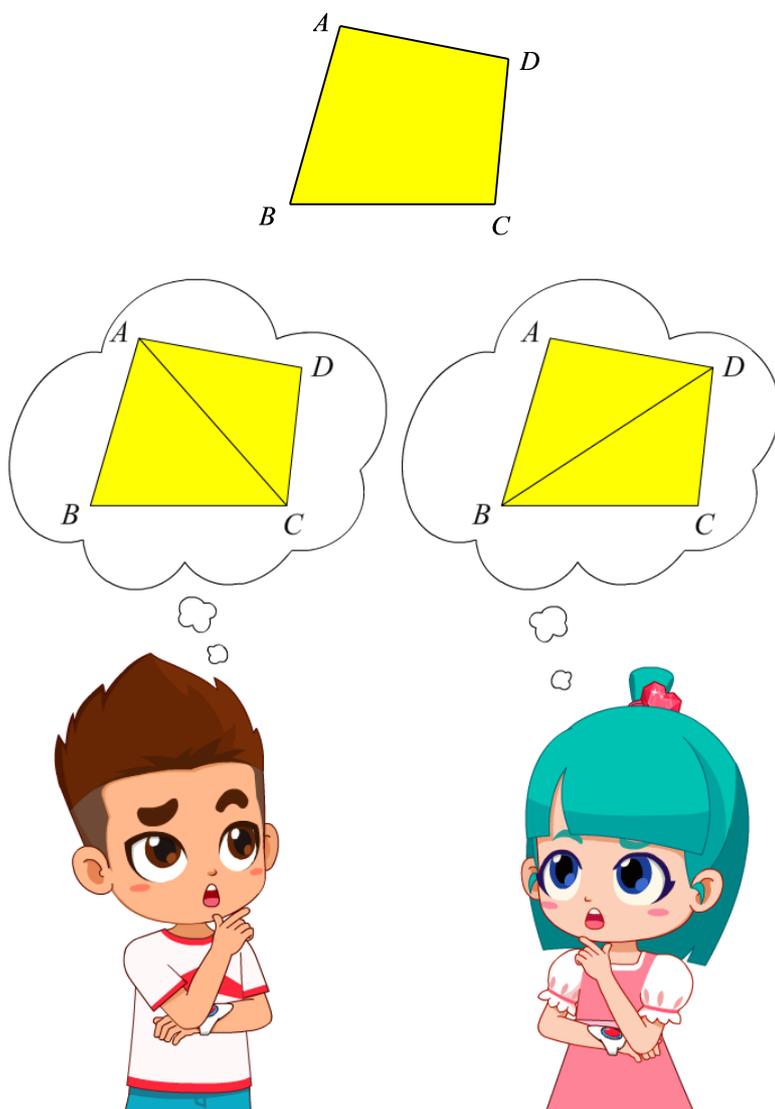
答案 36, 24, 14.



**解析** 根据风筝模型，有  $S_{\triangle ABD} : S_{\triangle CBD} = AO : CO = 3 : 2$ ，则  $S_{\triangle ABD} = 60 \times \frac{3}{3+2} = 36$ ，  
 $S_{\triangle CBD} = 60 \times \frac{2}{3+2} = 24$ ，并且  $S_{\triangle AOD} : S_{\triangle COD} = AO : CO = 3 : 2$ ， $S_{\triangle CDO} = 15 \times \frac{2}{3} = 10$ ，  
 那么阴影部分的面积： $S_{\text{阴}} = 24 - 10 = 14$ 。

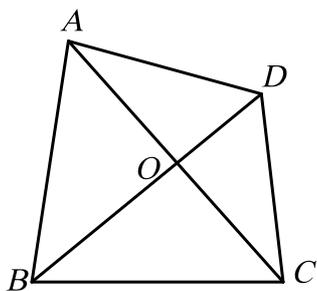
**生活应用**

艾迪和薇儿两人想要平分一块蛋糕，蛋糕形状如下图所示。艾迪提议沿  $AC$  切一刀，每人一块；薇儿提议沿  $BD$  切一刀，每人一块。小朋友们，请你通过实际的测量，结合今天所学的知识判断一下，两个人的分法哪一种更合理呢？



**答案** 薇儿的分法更合理。

**解析** 连接  $AC$ 、 $BD$  相交于点  $O$ 。



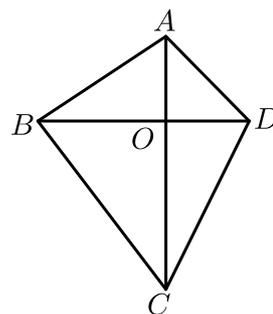
用尺子测量一下  $OA$ 、 $OB$ 、 $OC$ 、 $OD$  的长度，比较  $OA:OC$  与  $OB:OD$  哪个更接近  $1:1$ ，显然  $OA$  与  $OC$  长度更接近，所以应沿  $BD$  切开，即薇儿的分法更合理。

## 四、本讲巩固

1 如图， $AC$  与  $BD$  相交于  $O$  点， $OA$ 、 $OB$ 、 $OC$ 、 $OD$  的长度分别为 2、3、4、2，求：

(1)  $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle BOC} = \underline{\quad} : \underline{\quad}$  ;

(2)  $S_{\triangle ADC} : S_{\triangle ABC} = \underline{\quad} : \underline{\quad}$  .



答案 1:1

2:2

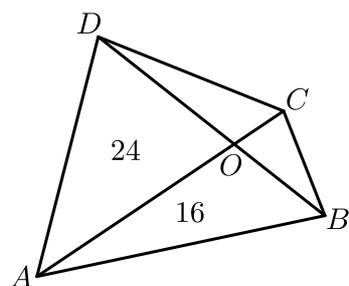
3:2

4:3

解析 (1)  $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle BOC} = AO : OC = 2 : 4 = 1 : 2$  ;

(2)  $S_{\triangle ADC} : S_{\triangle ABC} = DO : OB = 2 : 3$  .

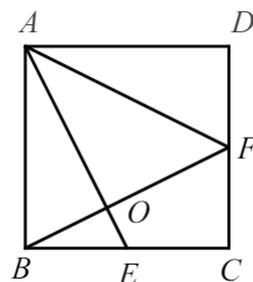
2 如图，四边形  $ABCD$  的面积是 50，两条对角线把它分成了 4 个小三角形，其中 2 个三角形的面积分别是 24 和 16。那么四个小三角形中最小的三角形面积是 \_\_\_\_\_。



**答案** 4

**解析**  $CO : OA = (50 - 24 - 16) : (24 + 16) = 1 : 4$  , 故  $S_{\triangle COD} = 24 \div 4 = 6$  ,  $S_{\triangle BOC} = 16 \div 4 = 4$  , 可见最小的三角形面积是4 .

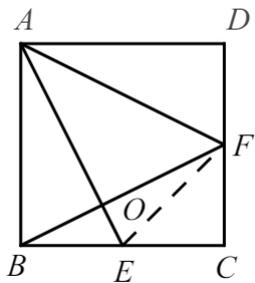
3 如下图，四边形  $ABCD$  是面积为64的正方形， $E$ 、 $F$  分别是  $BC$ 、 $CD$  的中点。那么  $AO : OE =$  \_\_\_\_\_ : \_\_\_\_\_ .



**答案** 1:4

2:1

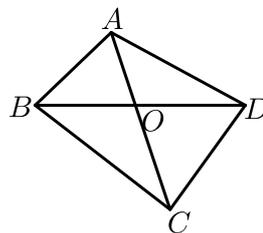
**解析** 连接  $EF$ ，则根据风筝模型有  $AO : OE = S_{\triangle ABF} : S_{\triangle EBF} = (64 \times \frac{1}{2}) : (64 \times \frac{1}{8}) = 4 : 1$  .



## 五、基础过关



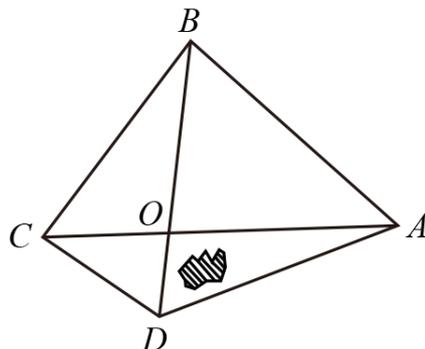
- 1 如图，四边形 $ABCD$ 中，对角线 $AC$ 与 $BD$ 相交于点 $O$ ，已知 $AO = 30$ ，并且 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CBD}} = \frac{3}{5}$ ，那么 $OC$ 的长是 \_\_\_\_\_。



**答案** 50

**解析** 根据风筝模型，有 $AO : OC = S_{\triangle ABD} : S_{\triangle CBD} = 3 : 5$ ，那么 $OC = 30 \div 3 \times 5 = 50$ 。

- 2 四边形 $ABCD$ 中，三角形 $AOB$ 的面积是6平方米，三角形 $BOC$ 的面积是3平方米，三角形 $COD$ 的面积是2平方米。已知阴影部分的面积为3.5平方米，那么空白部分的面积是 \_\_\_\_\_ 平方米。

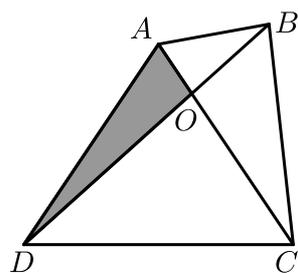


**答案** 11.5

**解析** 根据风筝模型， $S_{\triangle AOB} \times S_{\triangle COD} = S_{\triangle BOC} \times S_{\triangle AOD}$ ，从而

$S_{\triangle AOD} = \frac{S_{\triangle AOB} \times S_{\triangle COD}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{2 \times 6}{3} = 4$ 平方米，因此整个公园的面积是 $3 + 2 + 6 + 4 = 15$ 平方米，其中阴影部分是3.5平方米，所以空白部分的面积是 $15 - 3.5 = 11.5$ 平方米。

- 3 如图，四边形 $ABCD$ 中，对角线 $AC$ 与 $BD$ 相交于点 $O$ ，已知 $\triangle ABO$ 、 $\triangle BCO$ 面积分别为6、20，已知四边形 $ABCD$ 的面积为78，求阴影部分的面积是 \_\_\_\_\_。

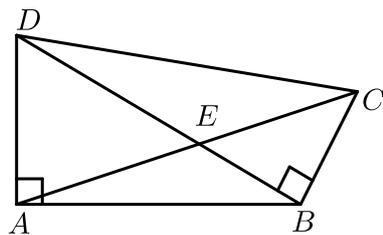


**答案** 12

**解析** 根据风筝模型，有  $AO : CO = S_{\triangle ABO} : S_{\triangle BCO} = 6 : 20 = 3 : 10$ ，

$S_{\triangle ABD} : S_{\triangle CBD} = AO : CO = 3 : 10$ ， $S_{\triangle ABD} = 78 \times \frac{3}{3+10} = 18$ ，并且  $S_{\triangle ABO} = 6$ ，那么阴影部分的面积： $S_{\text{阴}} = 18 - 6 = 12$ 。

4 在四边形  $ABCD$  中，已知  $\angle DAB$ 、 $\angle DBC$  均为直角， $AD = 9$ ， $AB = 12$ ， $DB = 15$ ， $BC = 6$ ，对角线  $AC$ 、 $BD$  相交于点  $E$ ，求  $AE : EC = \underline{\quad} : \underline{\quad}$ 。



**答案** 1:6

2:5

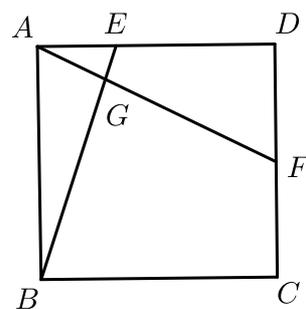
**解析**  $S_{\triangle ABD} = 9 \times 12 \div 2 = 54$ ， $S_{\triangle BCD} = 15 \times 6 \div 2 = 45$ ，所以

$AE : EC = S_{\triangle ABD} : S_{\triangle BCD} = 54 : 45 = 6 : 5$ 。

故答案为：6:5。

## 六、能力提升

1 如图，正方形  $ABCD$  中， $DE = 2AE$ ， $F$  是  $CD$  中点，三角形  $AEG$  的面积是 1，则正方形  $ABCD$  的面积是  $\underline{\quad}$ 。

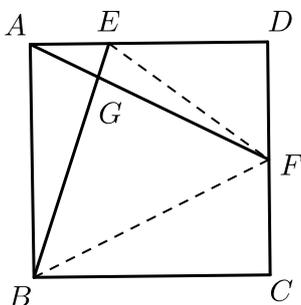


答案

42

解析

连接  $BF$ ,  $EF$ , 根据风筝模型:  $\frac{EG}{BG} = \frac{S_{\triangle EAF}}{S_{\triangle BAF}} = \frac{1}{12} : \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ , 所以  $S_{\triangle ABE} = 7$ , 所以正方形  $ABCD$  的面积是  $7 \times 6 = 42$ .



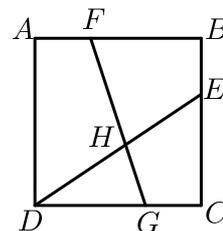
2

如图, 正方形  $ABCD$  的面积是 1,  $CE = 2BE$ ,  $BF = 2AF$ ,  $DG = 2CG$ . 请求出:

(1) 三角形  $CDE$  的面积是 \_\_\_\_\_ .

(2)  $FH : HG =$  \_\_\_\_\_ : \_\_\_\_\_ .

(3) 四边形  $BEHF$  的面积是 \_\_\_\_\_ .



答案

1:  $\frac{1}{3}$

2: 7

3: 4

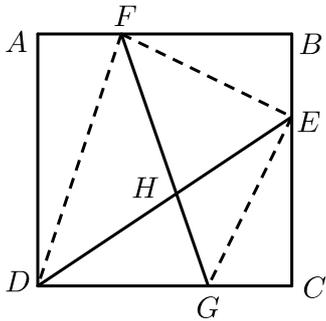
4:  $\frac{19}{66}$



**解析** (1)正方形面积是1,说明边长是1,而E点是BC的三等分点,故三角形CDE的面积等于

$$CD \times CE \div 2 = 1 \times \frac{2}{3} \div 2 = \frac{1}{3};$$

(2)连接FD、FE、EG,



根据风筝模型,  $FH : HG = S_{\triangle FDE} : S_{\triangle GDE}$ . 其中  $S_{\triangle GDE} = \frac{2}{3} S_{\triangle CDE} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ ;

$$S_{\triangle FDE} = 1 - S_{\triangle CDE} - S_{\triangle BEF} - S_{\triangle ADF} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \div 2 - 1 \times \frac{1}{3} \div 2$$

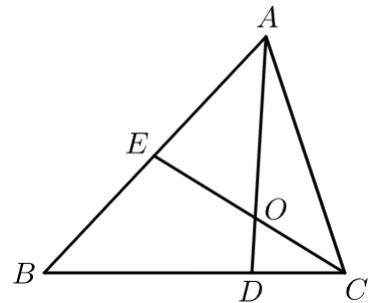
$$= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{6} = \frac{7}{18}; \text{ 故 } FH : HG = \frac{7}{18} : \frac{2}{9} = 7 : 4;$$

(3)  $S_{BEHF} = S_{\triangle BEF} + S_{\triangle HEF}$ , 其中  $S_{\triangle BEF} = \frac{1}{9}$ ,

$$S_{\triangle HEF} = \frac{7}{7+4} S_{\triangle EFG} = \frac{7}{11} \times \left( 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{2} \right) = \frac{35}{198}, \text{ 故 } S_{BEHF} = \frac{35}{198} + \frac{1}{9} = \frac{19}{66}.$$

3  $\triangle ABC$ 中, D是BC上的三等分点, E是AB中点, 则  $AO : OD = \underline{\quad} : \underline{\quad}$  ;

$EO : OC = \underline{\quad} : \underline{\quad}$  .



**答案** 1:3

2:1

3:1

4:1

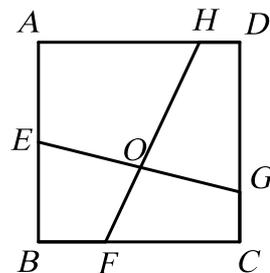
**解析** 连接ED, 则  $AO : OD = S_{\triangle AEC} : S_{\triangle DEC} = 3 : 1$ ,  $EO : OC = S_{\triangle AED} : S_{\triangle ACD} = 1 : 1$  .



## 七、创新挑战

如图，在边长为60的正方形 $ABCD$ 中， $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$ 分别是 $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $DA$ 上点。

$AH = 4HD$ ， $DG = 3GC$ ， $CF = 2FB$ ， $BE = EA$ 。  $EG$ 、 $FH$ 相交于点 $O$ ，那么 $EO : OG =$  \_\_\_\_\_ : \_\_\_\_\_（请写出最简整数比）。



**答案** 1:34

2:33

**解析** 连接 $EF$ 、 $FG$ 、 $GH$ 、 $HE$ ，根据风筝模型，

$$\begin{aligned}
 EO : OG &= S_{\triangle EFH} : S_{\triangle GFH} = (S_{\triangle ABFH} - S_{\triangle EBF} - S_{\triangle EAH}) : (S_{\triangle HDCF} - S_{\triangle GDH} - S_{\triangle GCF}) \\
 &= [(20 + 48) \times 60 \div 2 - 20 \times 30 \div 2 - 48 \times 30 \div 2] : [(12 + 40) \times 60 \div 2 - 12 \times 45 \div 2 - 15 \times 40 \div 2] \\
 &= 1020 : 990 \\
 &= 34 : 33.
 \end{aligned}$$

