

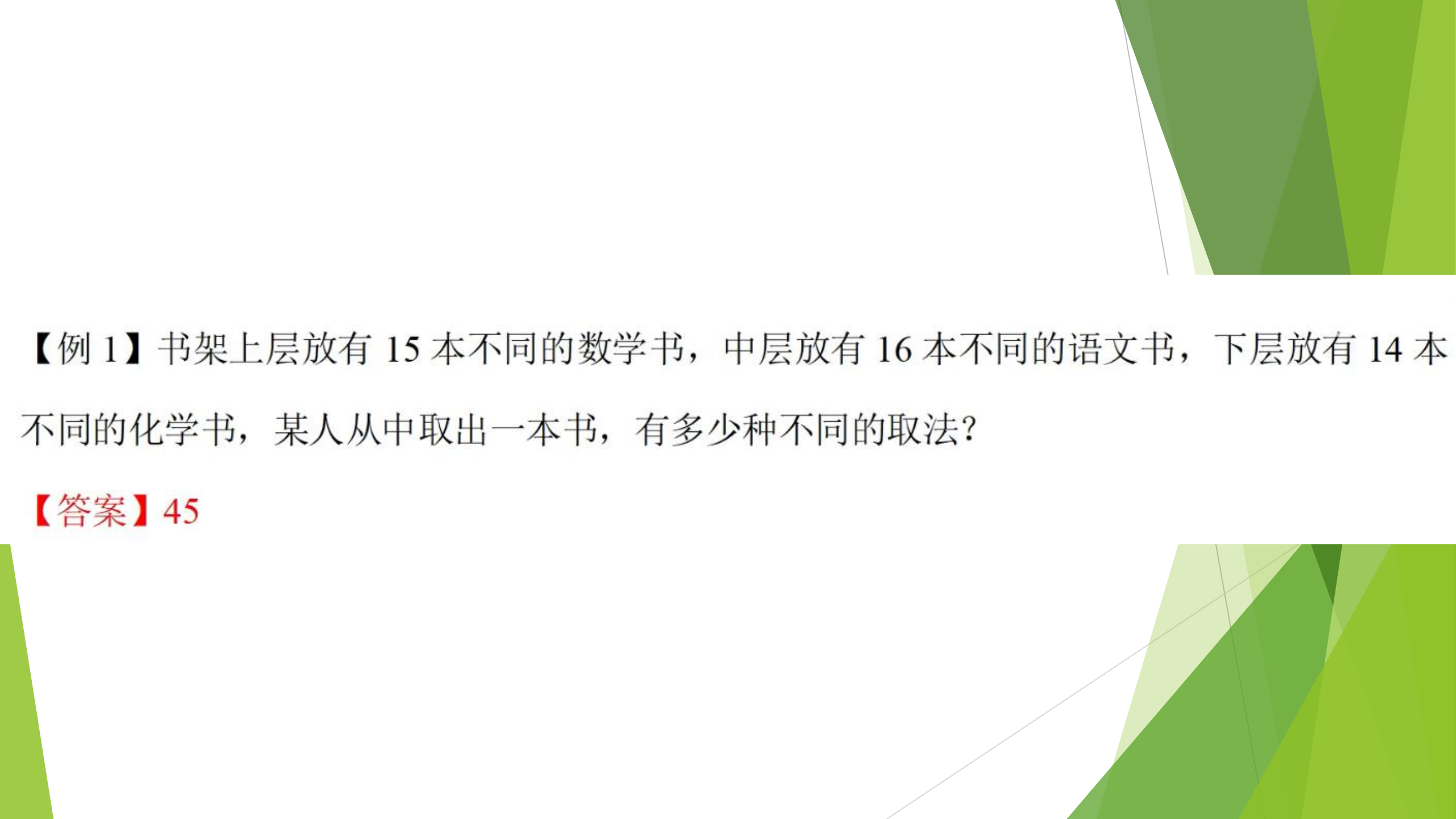
排列组合

快提学堂

1. 分类加法计数原理

完成一件事，有 n 类办法，在第 1 类办法中有 m_1 种不同的方法，在第 2 类办法中有 m_2 种不同的方法， $\dots\dots$ ，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有

$N = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ 种不同的方法.



【例 1】书架上层放有 15 本不同的数学书，中层放有 16 本不同的语文书，下层放有 14 本不同的化学书，某人从中取出一本书，有多少种不同的取法？

【答案】45

2. 分步乘法计数原理

完成一件事，需要分成 n 个步骤，做第1步有 m_1 种不同的方法，做第2步有 m_2 种不同的方法，……，做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m_1 m_2 \cdots m_n$ 种不同的方法.

【例 2】书架的第一层放有 6 本不同的数学书，第二层放有 6 本不同的语文书，第三层放有 5 本不同的英语书。从这些书中任取一本数学、一本语文、一本英语共三本书的不同取法有多少种？

【答案】 180

【练习 1】 现有 5 幅不同的国画，2 幅不同的油画，7 幅不同的水彩画。

- (1) 从中任选一幅画布置房间，有几种不同的选法？
- (2) 从这些国画、油画、水彩画中各选一幅布置房间，有几种不同的选法？
- (3) 从这些画中选出两幅不同种类的画布置房间，有几种不同的选法？

【答案】 (1) 14; (2) 70; (3) 59.

【练习2】 用 0, 1, 2, 3, 4, 5 这六个数字,

- (1) 可以组成多少个数字不重复的三位数?
- (2) 可以组成多少个数字允许重复的三位数?
- (3) 可以组成多少个数字不重复的三位奇数?

【答案】 (1) 100 (2) 180 (3) 48

【练习 3】 一个口袋里有 5 封信，另一个口袋里有 4 封信，各封信内容均不相同。

(1) 从两个口袋里各取 1 封信，有多少种不同的取法？

(2) 把这两个口袋里的 9 封信，分别投入 4 个邮筒，有多少种不同的投法？

【答案】 (1) 20 (2) 4^9

【练习4】如图所示给五个区域涂色，现有四种颜色可供选择。要求每一个区域只涂一种颜色，相邻区域所涂颜色不同，则不同涂色方法种数为

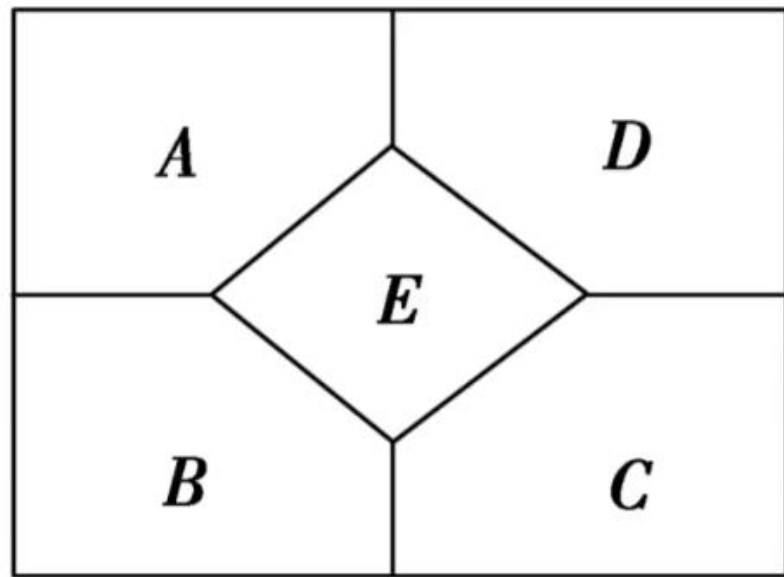
A. 24 种

C. 72 种

B. 48 种

D. 96 种

【答案】C





思考1：从7个人中挑出4个人站成一排会有多少种情况？

3. 排列与排列数

(1) 排列的定义：从 n 个不同元素中，任取 m ($m \leq n$) 个不同元素，按照一定的顺序排成一行，叫做排列。

(2) 排列数的定义：从 n 个不同元素中，任取 m ($m \leq n$) 个不同元素的所有排列的个数，叫做排列数，用符号 A_n^m 表示。

(3) 排列数计算公式：
$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$
 (其中 $m \leq n, m, n \in \mathbf{N}^*$)。


(i) 若 $m = n$ ，排列称为全排列，记 $A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \cdots 3 \times 2 \times 1 = n!$ (称为 n 的阶乘)；

(ii) 规定 $0! = 1$ ；

(iii) 排列数的性质： $A_n^m = n A_{n-1}^{m-1}$ 。

【例题】计算：(1) A_7^3 ；(2) A_5^5

【答案】(1) $A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$ (2) $A_5^5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$



【例题】（无限制条件的排列问题）利用 1,2,3,4 这四个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？（用数字作答）。

【答案】 24.



【例题】（元素相邻问题）有 3 名女生、4 名男生站成一排，女生必须相邻，男生也必须相邻，则不同的排法种数为

A. 12

B. 24

C. 144

D. 288

【答案】D

【例题】（元素不相邻问题）5位母亲带领5名儿童站成一排照相，儿童不相邻的站法有

A. 86400种

B. 14400种

C. 720种

D. 120种

【答案】A

【例题】（定位、定元问题）6名同学排成1排照相,要求同学甲既不站在最左边又不站在最右边,共有多少种不同站法?

【答案】 480.

思考2：从7个人中挑出4个人会有多少种情况？

4. 组合与组合数

(1) 组合的定义：从 n 个不同元素中，取出 m ($m \leq n$) 个不同元素组成一组，叫做组合。

(2) 组合数的定义：从 n 个不同元素中，取出 m ($m \leq n$) 个不同元素的所有组合的个数，

叫做组合数，用符号 C_n^m 表示。

(3) 组合数计数公式：
$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$
 (其中

$m \leq n, m, n \in \mathbf{N}^*$)。规定 $C_n^0 = 1$ 。

(4) 排列数与组合数的关系： $A_n^m = C_n^m A_m^m$ 。

(5) 组合数的性质：(i) $C_n^m = C_n^{n-m}$ ；(ii) $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$ ；(iii) $rC_n^r = nC_{n-1}^{r-1}$ 。

【例题】 计算：(1) C_7^4 ； (2) C_{10}^7 ；

【答案】 (1) $C_7^4 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4!} = 35$ ；

(2) 解法 1: $C_{10}^7 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{7!} = 120$.

解法 2: $C_{10}^7 = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = 120$.

【例题】（无限制条件的组合问题）某书店有 11 种杂志，2 元 1 本的 8 种，1 元 1 本的 3 种.小张用 10 元钱买杂志（每种至多买一本，10 元钱刚好用完），则不同买法的种数是.（用数字作答）

【答案】 266

【例题】（有限制条件的组合问题）某医院从 10 名医疗专家中抽调 6 名赴灾区救灾，其中这 10 名医疗专家中有 4 名是外科专家。问：

- (1) 抽调的 6 名专家中恰有 2 名是外科专家的抽调方法有多少种？
- (2) 至少有 2 名外科专家的抽调方法有多少种？
- (3) 至多有 2 名外科专家的抽调方法有多少种？

【答案】 (1) 90; (2) 185; (3) 115.



思考1：从7个人中挑出4个人站成一排会有多少种情况？

思考2：从7个人中挑出4个人会有多少种情况？



【例题】【广州高三上学期第一次调研】某学校获得 5 个高校自主招生推荐名额，其中甲大学 2 名，乙大学 2 名，丙大学 1 名，并且甲大学和乙大学都要求必须有男生参加，学校通过选拔定下 3 男 2 女共 5 个推荐对象，则不同的推荐方法共有（ ）

A. 36 种

B. 24 种

C. 22 种

D. 20 种

【答案】B

【例题】【山西省实验中学高三下学期模拟】某学校有 5 个班级的同学一起到某工厂参加社会实践活动，该工厂有 5 个车间供学生选择，每个班级任选一个车间进行实践学习，则恰有 2 个班级选择甲车间，1 个班级选择乙车间的方案有_____种.

【答案】270

【例题】(1) 将 5 名实习教师分配到高一年级的 3 个班实习，每班至少 1 名，最多 2 名，则不同的分配方案有 ()

- A. 30 种 B. 90 种 C. 180 种 D. 270 种

(2) 将 4 个颜色互不相同的球全部放入编号为 1 和 2 的两个盒子里，使得放入每个盒子里的球的个数不小于该盒子的编号，则不同的放球方法有 ()

- A. 10 种 B. 20 种 C. 36 种 D. 52 种

【答案】(1) B (2) A

【例题】【北京丰台区高三一模】某学校为了弘扬中华传统“孝”文化，共评选出 2 位男生和 2 位女生为校园“孝”之星，现将他们的照片展示在宣传栏中，要求同性别的同学不能相邻，不同的排法种数为（ ）

- A. 4 B. 8 C. 12 D. 24

【答案】B

1.相邻问题捆绑法:题目中规定相邻的几个元素捆绑成一个组,当作一个大元素参与排列.

例 1. A, B, C, D, E 五人并排站成一排, 如果 A, B 必须相邻且 B 在 A 的右边, 那么不同的排法种数有

A、60 种

B、48 种

C、36 种

D、24 种

2.相离问题插空法:元素相离 (即不相邻) 问题, 可先把无位置要求的几个元素全排列, 再把规定的相离的几个元素插入上述几个元素的空位和两端.

例 2. 七人并排站成一行, 如果甲乙两个必须不相邻, 那么不同的排法种数是

A、1440 种

B、3600 种

C、4820 种

D、4800 种

3.定序问题缩倍法:在排列问题中限制某几个元素必须保持一定的顺序,可用缩小倍数的方法.

例 3. A, B, C, D, E 五人并排站成一排, 如果 B 必须站在 A 的右边 (A, B 可以不相邻) 那么不同的排法种数是

- A、24 种 B、60 种 C、90 种 D、120 种

4.标号排位问题分步法:把元素排到指定位置上,可先把某个元素按规定排入,第二步再排另一个元素,如此继续下去,依次即可完成.

例 4. 将数字 1, 2, 3, 4 填入标号为 1, 2, 3, 4 的四个方格里, 每格填一个数, 则每个方格的标号与所填数字均不相同的填法有

- A、6 种 B、9 种 C、11 种 D、23 种

4.标号排位问题分步法:把元素排到指定位置上,可先把某个元素按规定排入,第二步再排另一个元素,如此继续下去,依次即可完成.

例 4. 将数字 1, 2, 3, 4 填入标号为 1, 2, 3, 4 的四个方格里, 每格填一个数, 则每个方格的标号与所填数字均不相同的填法有

A、6 种 B、9 种 C、11 种 D、23 种

【答案】先把 1 填入方格中, 符合条件的有 3 种方法, 第二步把被填入方格的对应数字填入其它三个方格, 又有三种方法; 第三步填余下的两个数字, 只有一种填法, 共有 $3 \times 3 \times 1 = 9$ 种填法, 选 B.

5.有序分配问题逐分法:有序分配问题指把元素分成若干组,可用逐步下量分组法.

例 5. (1) 有甲乙丙三项任务,甲需 2 人承担,乙丙各需一人承担,从 10 人中选出 4 人承担这三项任务,不同的选法种数是

A、1260 种

B、2025 种

C、2520 种

D、5040 种

5.有序分配问题逐分法:有序分配问题指把元素分成若干组,可用逐步下量分组法.

例5. (1) 有甲乙丙三项任务,甲需2人承担,乙丙各需一人承担,从10人中选出4人承担这三项任务,不同的选法种数是

A、1260种 B、2025种 C、2520种 D、5040种

【答案】先从10人中选出2人承担甲项任务,再从剩下的8人中选1人承担乙项任务,第三步从另外的7人中选1人承担丙项任务,不同的选法共有 $C_{10}^2 C_8^1 C_7^1 = 2520$ 种,选C.

平均分组问题除法原理: 平均分成的组, 不管它们的顺序如何, 都是一种情况, 所以分组后要一

定要除以 A_n^n (n 为均分的组数) 避免重复计数。

(2) 12 名同学分别到三个不同的路口进行流量的调查, 若每个路口 4 人, 则不同的分配方

案有

A、 $C_{12}^4 C_8^4 C_4^4$ 种

B、 $3C_{12}^4 C_8^4 C_4^4$ 种

C、 $C_{12}^4 C_8^4 A_3^3$ 种

D、 $\frac{C_{12}^4 C_8^4 C_4^4}{A_3^3}$ 种

【答案】 A.

6.全员分配问题分组法:

例 6. (1) 4 名优秀学生全部保送到 3 所学校去, 每所学校至少去一名, 则不同的保送方案有多少种?

(2) 5 本不同的书, 全部分给 4 个学生, 每个学生至少一本, 不同的分法种数为

- A、480 种 B、240 种 C、120 种 D、96 种

【答案 1】 把四名学生分成 3 组有 C_4^2 种方法, 再把三组学生分配到三所学校有 A_3^3 种, 故共有 $C_4^2 A_3^3 = 36$ 种方法.

说明: 分配的元素多于对象且每一对象都有元素分配时常用先分组再分配.

【答案 2】 B .

7.名额分配问题隔板法:

例 7. 10 个三好学生名额分到 7 个班级, 每个班级至少一个名额, 有多少种不同分配方案?

8.限制条件的分配问题分类法:

例 8. 某高校从某系的 10 名优秀毕业生中选 4 人分别到西部四城市参加中国西部经济开发建设, 其中甲同学不到银川, 乙不到西宁, 共有多少种不同派遣方案?

【答案】 因为甲乙有限制条件，所以按照是否含有甲乙来分类，有以下四种情况：

- ①若甲乙都不参加，则有派遣方案 A_8^4 种；②若甲参加而乙不参加，先安排甲有 3 种方法，然后安排其余学生有 A_8^3 方法，所以共有 $3A_8^3$ ；③若乙参加而甲不参加同理也有 $3A_8^3$ 种；④若甲乙都参加，则先安排甲乙，有 7 种方法，然后再安排其余 8 人到另外两个城市有 A_8^2 种，共有 $7A_8^2$ 方法. 所以共有不同的派遣方法总数为 $A_8^4 + 3A_8^3 + 3A_8^3 + 7A_8^2 = 4088$ 种.

9.多元问题分类法：元素多，取出的情况也多种，可按结果要求分成不相容的几类情况分别计数，最后总计.


例 9. 从 1, 2, 3..., 100 这 100 个数中，任取两个数，使它们的乘积能被 7 整除，这两个数的取法（不计顺序）共有多少种？

10.交叉问题集合法：某些排列组合问题几部分之间有交集，可用集合中求元素个数公式

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$


例 10. 从 6 名运动员中选出 4 人参加 4×100 米接力赛，如果甲不跑第一棒，乙不跑第四棒，

共有多少种不同的参赛方案？



11.定位问题优先法：某个或几个元素要排在指定位置，可先排这个或几个元素；再排其它的元素。

例 11. 1 名老师和 4 名获奖同学排成一排照相留念，若老师不站两端则有不同的排法有多少种？



12.多排问题单排法:把元素排成几排的问题可归结为一排考虑,再分段处理.

例 12. (1) 6 个不同的元素排成前后两排, 每排 3 个元素, 那么不同的排法种数是

A、36 种 B、120 种 C、720 种 D、1440 种

(2) 8 个不同的元素排成前后两排, 每排 4 个元素, 其中某 2 个元素要排在前排, 某 1 个元素排在后排, 有多少种不同排法?

【答案 1】 前后两排可看成一排的两段，因此本题可看成 6 个不同的元素排成一排，共种，选 C.

【答案 2】 看成一排，某 2 个元素在前半段四个位置中选排 2 个，有 A_4^2 种，某 1 个元素排在后半段的四个位置中选一个有 A_4^1 种，其余 5 个元素任排 5 个位置上有 A_5^5 种，故共有 $A_4^1 A_4^2 A_5^5 = 5760$ 种排法.

13. “至少” “至多” 问题用间接排除法或分类法: 抽取两类混合元素不能分步抽.

例 13. 从 4 台甲型和 5 台乙型电视机中任取 3 台, 其中至少要甲型和乙型电视机各一台, 则不同的取法共有

A、140 种

B、80 种

C、70 种

D、35 种

13. “至少” “至多” 问题用间接排除法或分类法: 抽取两类混合元素不能分步抽.

例 13. 从 4 台甲型和 5 台乙型电视机中任取 3 台, 其中至少要甲型和乙型电视机各一台, 则不同的取法共有

A、140 种 B、80 种 C、70 种 D、35 种

【答案】 解析 1: 逆向思考, 至少各一台的反面就是分别只取一种型号, 不取另一种型号的电视机, 故不同的取法共有 $C_9^3 - C_4^3 - C_5^3 = 70$ 种, 选 C.

解析 2: 至少要甲型和乙型电视机各一台可分两种情况: 甲型 1 台乙型 2 台; 甲型 2 台乙型 1 台; 故不同的取法有 $C_5^2 C_4^1 + C_5^1 C_4^2 = 70$ 台, 选 C.

14.选排问题先取后排:从几类元素中取出符合题意的几个元素,再安排到一定的位置上,可用先取后排法.

例 14. (1) 四个不同球放入编号为 1, 2, 3, 4 的四个盒中, 则恰有一个空盒的放法有多少种?

(2) 9 名乒乓球运动员, 其中男 5 名, 女 4 名, 现在要进行混合双打训练, 有多少种不同的分组方法?

15.部分合条件问题排除法:在选取的总数中, 只有一部分合条件, 可以从总数中减去不符合条件数, 即为所求.

例 15. (1) 以正方体的顶点为顶点的四面体共有

A、70 种 B、64 种 C、58 种 D、52 种

(2) 四面体的顶点和各棱中点共 10 点, 在其中取 4 个不共面的点, 不同的取法共有

A、150 种 B、147 种 C、144 种 D、141 种

【答案 1】 正方体 8 个顶点从中每次取四点，理论上可构成 C_8^4 四面体，但 6 个表面和 6 个对角面的四个顶点共面都不能构成四面体，所以四面体实际共有 $C_8^4 - 12 = 58$ 个。

【答案 2】 10 个点中任取 4 个点共有 C_{10}^4 种，其中四点共面的有三种情况：①在四面体的四个面上，每面内四点共面的情况为 C_6^4 ，四个面共有 $4C_6^4$ 个；②过空间四边形各边中点的平行四边形共 3 个；③过棱上三点与对棱中点的三角形共 6 个。所以四点不共面的情况的种数是 $C_{10}^4 - 4C_6^4 - 3 - 6 = 141$ 种。

16.圆排问题线排法:把 n 个不同元素放在圆周 n 个无编号位置上的排列, 顺序 (例如按顺时针) 不同的排法才算不同的排列, 而顺序相同 (即旋转一下就可以重合) 的排法认为是相同的, 它与普通排列的区别在于只计顺序而首位、末位之分, 下列 n 个普通排列:

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n; a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots; a_n, a_1, \dots, a_{n-1}$ 在圆排列中只算一种, 因为旋转后可以重合, 故认为相同, n 个元素的圆排列数有 $\frac{n!}{n}$ 种. 因此可将某个元素固定展成线排, 其它的

$n-1$ 元素全排列.

例 16.5 对姐妹站成一圈, 要求每对姐妹相邻, 有多少种不同站法?

【答案】 首先可让 5 位姐姐站成一圈，属圆排列有 A_4^4 种，然后在让插入其间，每位均可插入其姐姐的左边和右边，有 2 种方式，故不同的安排方式 $24 \times 2^5 = 768$ 种不同站法。

说明：从 n 个不同元素中取出 m 个元素作圆形排列共有 $\frac{1}{m} A_n^m$ 种不同排法。

17.可重复的排列求幂法:允许重复排列问题的特点是以元素为研究对象,元素不受位置的约束,可逐一安排元素的位置,一般地 n 个不同元素排在 m 个不同位置的排列数有 m^n 种方法.

例 17. 把 6 名实习生分配到 7 个车间实习共有多少种不同方法?

18. 复杂排列组合问题构造模型法:

例 18. 马路上有编号为 $1, 2, 3, \dots, 9$ 九只路灯, 现要关掉其中的三盏, 但不能关掉相邻的二盏或三盏, 也不能关掉两端的两盏, 求满足条件的关灯方案有多少种?

18.复杂排列组合问题构造模型法:

例 18. 马路上有编号为 1, 2, 3..., 9 九只路灯, 现要关掉其中的三盏, 但不能关掉相邻的二盏或三盏, 也不能关掉两端的两盏, 求满足条件的关灯方案有多少种?

【答案】把此问题当作一个排对模型, 在 6 盏亮灯的 5 个空隙中插入 3 盏不亮的灯 C_5^3 种方法, 所以满足条件的关灯方案有 10 种.

说明: 一些不易理解的排列组合题, 如果能转化为熟悉的模型如填空模型, 排队模型, 装盒模型可使问题容易解决.

19.元素个数较少的排列组合问题可以考虑枚举法:

例 19. 设有编号为 1, 2, 3, 4, 5 的五个球和编号为 1, 2, 3, 4, 5 的盒子现将这 5 个球投入 5 个盒子要求每个盒子放一个球, 并且恰好有两个球的号码与盒子号码相同, 问有多少种不同的方法?

20.复杂的排列组合问题也可用分解与合成法:

例 20. (1) 30030 能被多少个不同偶数整除?

(2) 正方体⁸个顶点可连成多少队异面直线?

【答案 1】 先把 30030 分解成质因数的形式： $30030=2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$ ；依题意偶因数 2 必

取，3, 5, 7, 11, 13 这 5 个因数中任取若干个组成成积，所有的偶因数为

$$C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 32 \text{ 个.}$$

【答案 2】 因为四面体中仅有 3 对异面直线，可将问题分解成正方体的 8 个顶点可构成多少

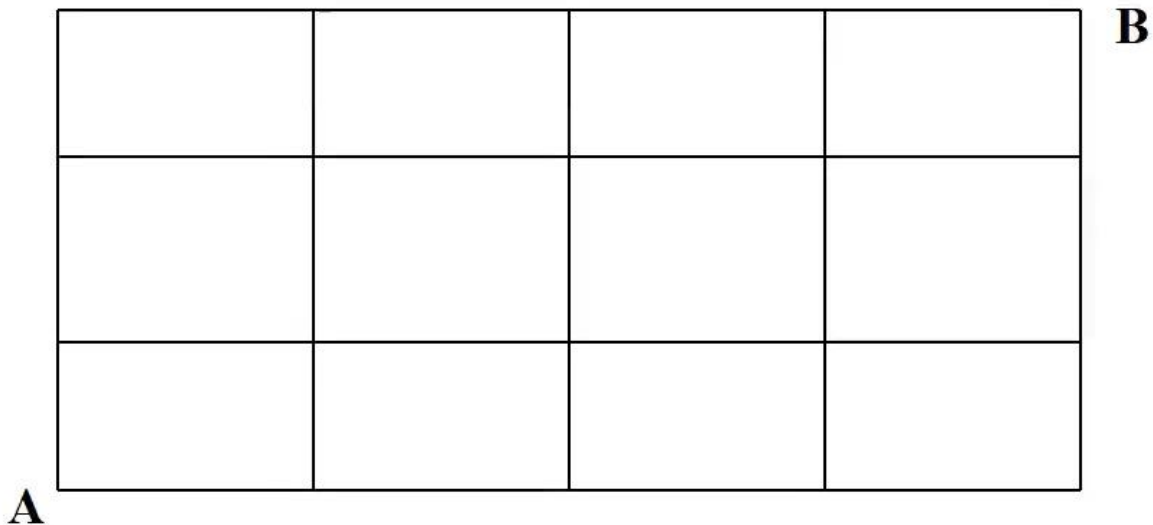
个不同的四面体，从正方体 8 个顶点中任取四个顶点构成的四面体有 $C_8^4 - 12 = 58$ 个，所以

8 个顶点可连成的异面直线有 $3 \times 58 = 174$ 对.

21.利用对应思想转化法:对应思想是教材中渗透的一种重要的解题方法,它可以将复杂的问题转化为简单问题处理.

例 21. (1) 圆周上有 10 点, 以这些点为端点的弦相交于圆内的交点最多有多少个?

(2) 某城市的街区有 12 个全等的矩形组成, 其中实线表示马路, 从 A 到 B 的最短路径有多少种?



<https://www.koolearn.com/shiti/list-2-2-27467-18.html>