组合计数

炼石计划

October 29 2023

组合计数基本原理

加法原理

完成一个工程可以有 n 类办法，$a_i(1 \leq i \leq n)$ 代表第 i 类方法的数目。那么完成这件事共有 $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 种不同的方法。

乘法原理

完成一个工程需要分 n 个步骤，$a_i(1 \leq i \leq n)$ 代表第 i 个步骤的不同方法数目。那么完成这件事共有 $S = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ 种不同的方法。

排列组合

排列数

从 n 个不同元素中，任取 m（$m \leq n$）个元素按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列；从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 A_n^m（或者是 P_n^m）表示。
排列的计算公式如下：

$$\mathrm{A}_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

公式可以这样理解：n 个人选 m 个来排队（$m \leq n$）。第一个位置可以选 n 个，第二位置可以选 $n-1$ 个，以此类推，第 m 个（最后一个）可以选 $n-m+1$ 个。

全排列：n 个人全部来排队，队长为 n。第一个位置可以选 n 个，第二位置可以选 $n-1$ 个，以此类推得：
$\mathrm{A}_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \times 2 \times 1 = n!$

排列组合

组合数

从 n 个不同元素中，任取 $m \leq n$ 个元素组成一个集合，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合；从 n 个不同元素中取出 $m \leq n$ 个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用符号 $\binom{n}{m}$ 来表示，读作「n 选 m」。

组合数计算公式

$$\binom{n}{m} = \frac{\mathrm{A}_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

如何理解上述公式？我们考虑 n 个人选 m 个出来（$m \leq n$），不排队，不在乎顺序。如果在乎顺序那么就是 A_n^m，如果不在乎那么就要除掉重复，那么重复了多少？同样选出来的 m 个人，他们还要「全排」得 $m!$

排列组合

组合数

$$\binom{n}{m} \times m! = \mathrm{A}_n^m$$

$$\binom{n}{m} = \frac{\mathrm{A}_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

组合数也常用 C_n^m 表示，即 $\mathrm{C}_n^m = \binom{n}{m}$。现在数学界普遍采用 $\binom{n}{m}$ 的记号而非 C_n^m。

组合数也被称为「二项式系数」，下文二项式定理将会阐述其中的联系。

特别地，规定当 $m > n$ 时，$\mathrm{A}_n^m = \binom{n}{m} = 0$。

正整数和的数目

插板法（Stars and bars）

是用于求一类给相同元素分组的方案数的一种技巧，也可以用于求一类线性不定方程的解的组数。

问题一：现有 n 个 **完全相同**的元素，要求将其分为 k 组，保证每组至少有一个元素，一共有多少种分法？

正整数和的数目

插板法（Stars and bars）

是用于求一类给相同元素分组的方案数的一种技巧，也可以用于求一类线性不定方程的解的组数。

问题一：现有 n 个 **完全相同**的元素，要求将其分为 k 组，保证每组至少有一个元素，一共有多少种分法？
考虑拿 $k-1$ 块板子插入到 n 个元素两两形成的 $n-1$ 个空里面。
因为元素是完全相同的，所以答案就是 $\binom{n-1}{k-1}$。
本质是求 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ 的正整数解的组数。

非负整数和的数目

问题二：如果问题变化一下，每组允许为空呢？

非负整数和的数目

问题二：如果问题变化一下，每组允许为空呢？
显然此时没法直接插板了，因为有可能出现很多块板子插到一个空里面的情况，非常不好计算。
我们考虑创造条件转化成有限制的问题一，先借 k 个元素过来，在这 $n+k$ 个元素形成的 $n+k-1$ 个空里面插板，答案为

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

可以这么理解：
开头我们借来了 k 个元素，用于保证每组至少有一个元素，插完板之后再把这 k 个借来的元素从 k 组里面拿走。因为元素是相同的，所以转化过的情况和转化前的情况可以一一对应，答案也就是相等的。

由此可以推导出插板法的公式：$\binom{n+k-1}{n}$。

本质是求 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ 的非负整数解的组数（即要求 $x_i \geq 0$）。

不同下界整数和的数目

问题三：如果再扩展一步，要求对于第 i 组，至少要分到 $a_i, \sum a_i \leq n$ 个元素呢？

不同下界整数和的数目

问题三：如果再扩展一步，要求对于第 i 组，至少要分到 $a_i, \sum a_i \leq n$ 个元素呢？
本质是求 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ 的解的数目，其中 $x_i \geq a_i$。
类比无限制的情况，我们借 $\sum a_i$ 个元素过来，保证第 i 组至少能分到 a_i 个。
也就是令 $x_i' = x_i - a_i$
得到新方程：

$$(x_1' + a_1) + (x_2' + a_2) + \cdots + (x_k' + a_k) = n$$
$$x_1' + x_2' + \cdots + x_k' = n - a_1 - a_2 - \cdots - a_k$$
$$x_1' + x_2' + \cdots + x_k' = n - \sum a_i$$

其中 $x_i' \geq 0$
然后问题三就转化成了问题二，直接用插板法公式得到答案为

$$\binom{n - \sum a_i + k - 1}{n - \sum a_i}$$

二项式定理

二项式定理阐明了一个展开式的系数:

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

证明可以采用数学归纳法，利用 $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$ 做归纳。

二项式定理也可以很容易扩展为多项式的形式:
设 n 为正整数，x_i 为实数，

$$(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n=\sum_{n_1+\cdots+n_t=n}\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_t}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_t^{n_t}$$

其中的 $\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_t}$ 是多项式系数，它的性质也很相似:

$$\sum\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_t}=t^n$$

多重集的排列数

多重集是指包含重复元素的广义集合。设 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k\}$ 表示由 n_1 个 a_1，n_2 个 a_2，$\cdots$，n_k 个 a_k 组成的多重集，S 的全排列个数为

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

相当于把相同元素的排列数除掉了。具体地，你可以认为你有 k 种不一样的球，每种球的个数分别是 $n_1,n_2,\cdots,n_k$，且 $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$。这 n 个球的全排列数就是 **多重集的排列数**。多重集的排列数常被称作 **多重组合数**。我们可以用多重组合数的符号表示上式：

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_k}=\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}$$

可以看出，$\binom{n}{m}$ 等价于 $\binom{n}{m,n-m}$。

多重集的组合数

设 $S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k\}$ 表示由 n_1 个 a_1， n_2 个 a_2， $\cdots$， n_k 个 a_k 组成的多重集。那么对于整数 $r(r<n_i,\forall i\in[1,k])$，从 S 中选择 r 个元素组成一个多重集的方案数就是 **多重集的组合数**。这个问题等价于 $x_1+x_2+\cdots+x_k=r$ 的非负整数解的数目，可以用插板法解决，答案为

$$\binom{r+k-1}{k-1}$$

考虑这个问题：设 $S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k,\}$ 表示由 n_1 个 a_1， n_2 个 a_2， $\cdots$， n_k 个 a_k 组成的多重集。那么对于正整数 r，从 S 中选择 r 个元素组成一个多重集的方案数。

多重集的组合数

考虑这个问题：设 $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \cdots, n_k \cdot a_k,\}$ 表示由 n_1 个 a_1，n_2 个 a_2，$\cdots$，n_k 个 a_k 组成的多重集。那么对于正整数 r，从 S 中选择 r 个元素组成一个多重集的方案数。

多重集的组合数

考虑这个问题：设 $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\cdots,n_k\cdot a_k,\}$ 表示由 n_1 个 a_1，n_2 个 a_2，$\cdots$，n_k 个 a_k 组成的多重集。那么对于正整数 r，从 S 中选择 r 个元素组成一个多重集的方案数。
这样就限制了每种元素的取的个数。同样的，我们可以把这个问题转化为带限制的线性方程求解：

$$\forall i\in[1,k],\ x_i\le n_i,\ \sum_{i=1}^{k}x_i=r$$

于是很自然地想到了容斥原理。容斥的模型如下：

- 全集：$\sum_{i=1}^{k}x_i=r$ 的非负整数解。
- 属性：$x_i\le n_i$。

于是设满足属性 i 的集合是 S_i，$\overline{S_i}$ 表示不满足属性 i 的集合，即满足 $x_i\ge n_i+1$ 的集合（转化为上面插板法的问题三）。那么答案即为

$$\left|\bigcap_{i=1}^{k}S_i\right|=|U|-\left|\bigcup_{i=1}^{k}\overline{S_i}\right|$$

多重集的组合数

根据容斥原理，有：

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{k}\overline{S_i}\right| &= \sum_i\left|\overline{S_i}\right| - \sum_{i,j}\left|\overline{S_i}\cap\overline{S_j}\right| + \sum_{i,j,k}\left|\overline{S_i}\cap\overline{S_j}\cap\overline{S_k}\right| - \cdots + (-1)^{k-1}\left|\bigcap_{i=1}^{k}\overline{S_i}\right| \\ &= \sum_i\binom{k+r-n_i-2}{k-1} - \sum_{i,j}\binom{k+r-n_i-n_j-3}{k-1} \\ &\quad + \sum_{i,j,k}\binom{k+r-n_i-n_j-n_k-4}{k-1} - \cdots \\ &\quad + (-1)^{k-1}\binom{k+r-\sum_{i=1}^{k}n_i-k-1}{k-1}\end{aligned}$$

拿全集 $|U| = \binom{k+r-1}{k-1}$ 减去上式，得到多重集的组合数

$$Ans = \sum_{p=0}^{k}(-1)^p\sum_A\binom{k+r-1-\sum_A n_{A_i}-p}{k-1}$$

其中 A 是充当枚举子集的作用，满足 $|A| = p$，$A_i < A_{i+1}$。

圆排列

n 个人全部来围成一圈，所有的排列数记为 Q_n^n。考虑其中已经排好的一圈，从不同位置断开，又变成不同的队列。

圆排列

n 个人全部来围成一圈，所有的排列数记为 Q_n^n。考虑其中已经排好的一圈，从不同位置断开，又变成不同的队列。
所以有

$$\mathrm{Q}_n^n \times n = \mathrm{A}_n^n \Longrightarrow \mathrm{Q}_n = \frac{\mathrm{A}_n^n}{n} = (n-1)!$$

由此可知部分圆排列的公式：

$$\mathrm{Q}_n^r = \frac{\mathrm{A}_n^r}{r} = \frac{n!}{r \times (n-r)!}$$

组合数的性质

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

相当于将选出的集合对全集取补集，故数值不变。(对称性)

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

由定义导出的递推式。

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} \quad (1)$$

组合数的递推式（杨辉三角的公式表达）。我们可以利用这个式子，在 $O(n^2)$ 的复杂度下推导组合数。

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$$

这是二项式定理的特殊情况。取 $a = b = 1$ 就得到上式。

组合数的性质

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{n}{i}\binom{m}{m-i}=\binom{m+n}{m}\quad(n\geq m)\quad(2)$$

拆组合数的式子，组合意义比较明显。

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$$

(2) 的特殊情况，取 $n=m$ 即可。

$$\sum_{i=0}^{n}i\binom{n}{i}=n2^{n-1}$$

带权和的一个式子，通过对 (1) 对应的多项式函数求导可以得证。

$$\sum_{i=0}^{n}i^2\binom{n}{i}=n(n+1)2^{n-2}$$

与上式类似，可以通过对多项式函数求导证明。

组合数的性质

$$\sum_{l=0}^{n} \binom{l}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

通过组合分析——考虑 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}\}$ 的 $k+1$ 子集数可以得证，在恒等式证明中比较常用。

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$$

通过定义可以证明。

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i} = F_{n+1}$$

其中 F 是斐波那契数列。

[PKUSC2018] 真实排名

小 C 是某知名比赛的组织者，该比赛一共有 n 名选手参加，每个选手的成绩是一个非负整数，定义一个选手的排名是：成绩不小于他的选手的数量（包括他自己）。例如如果 3 位选手的成绩分别是 $[1,2,2]$ ，那么他们的排名分别是 $[3,2,2]$ 。

你知道所有选手的实力，所以在考试前就精准地估计了每个人的成绩，设你估计的第 i 个选手的成绩为 A_i，你拥有上帝视角，你估计的成绩就是选手的最终成绩。

但是在比赛当天发生了不可抗的事故，导致有一些选手的成绩变成了最终成绩的两倍，即便是有上帝视角也不知道具体是哪些选手的成绩翻倍了，唯一知道的信息是这样的选手恰好有 k 个。

现在你需要计算，经过了不可抗事故后，对于第 i 位选手，有多少种情况满足他的排名没有改变，答案对 998244353 取模的值即可。

对于 100% 的数据，有 $1 \le k < n \le 10^5$，$0 \le A_i \le 10^9$

[PKUSC2018] 真实排名

思路很简单，把每个数分两种情况讨论一下了，假设它为 x 。

- 不对它进行翻倍操作：那么很容易发现 $[\lceil \frac{x}{2} \rceil, x)$ 的数都不翻倍，其余部分任意．假设有 tot 个．那么这部分答案就是 $\binom{n-tot-1}{k}$ ，-1 因为它本身不能操作。
- 对它进行翻倍操作：那么又是显然的，$[x, 2x)$ 的所有数都需要翻倍，其余部分任意，假设这段有 tot 个。那么这部分答案就是 $\binom{n-tot}{k-tot}$ 。

然后当 $x=0$ 的时候需要特殊判断，我们可以随意翻倍都不改变结果了，答案就是 $\binom{n}{k}$ 。

Sliding Product Sum

有一个长为 N 的序列 $A = [1, 2, 3, \ldots, N]$ ，求所有长度 $\leq K$ 的子串权值积的和，对于 M 取模。
$N \leq 10^{18}, K \leq \min(600, n), M \leq 10^{18}$

Sliding Product Sum

令 ans_k 为长度为 k 的子串的贡献和。其实我们就是求对于所有 $k \le K$ 的 ans_k 的和，先推推式子。

$$ans_k = \sum_{i=k}^{n} \frac{i!}{(i-k)!} = k! \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = k! \binom{n+1}{k+1}$$

那么我们最后就是求对于所有 $k \le K$ 的 $k!$ 和 $\binom{n+1}{k+1}$ 。
前者很好求，对于后者组合数 n 好大用 $Lucas$ ？m 也好大。
但我们会发现 k 其实不是很大，利用上我们之前讲的组合数拆分

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \times \binom{m}{r-k}$$

当 $n = m$ 的时候就有

$$\binom{2n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \times \binom{n}{r-k}$$

维护一个序列 A_i 为 $[\binom{i}{0}, \binom{i}{1}, \dots, \binom{i}{K+1}]$ 。最后我们要求的就是 A_{N+1} ，有前面那个式子，我们就可以倍增求出 A_n ，复杂度为 $\mathcal{O}(k^2 \log n)$ 。

容斥定理

对于最基础的容斥定理，我们一般看 venn 图可以看出来。

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |B\cap C| - |C\cap A| + |A\cap B\cap C|$$

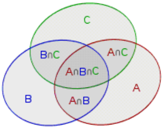

图: venn 图

把上述问题推广到一般情况，就是我们熟知的容斥原理。

容斥定理

设 U 中元素有 n 种不同的属性，而第 i 种属性称为 P_i，拥有属性 P_i 的元素构成集合 S_i，那么

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = \sum_{i} |S_i| - \sum_{i<j} |S_i \cap S_j| + \sum_{i<j<k} |S_i \cap S_j \cap S_k| - \cdots$$

$$+ (-1)^{m-1} \sum_{a_i<a_{i+1}} \left|\bigcap_{i=1}^{m} S_{a_i}\right| + \cdots + (-1)^{n-1} |S_1 \cap \cdots \cap S_n|$$

即

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sum_{a_i<a_{i+1}} \left|\bigcap_{i=1}^{m} S_{a_i}\right|$$

容斥定理

证明：对于每个元素使用二项式定理计算其出现的次数。对于元素 x，假设它出现在 $T_1, T_2, \cdots, T_m$ 的集合中，那么出现次数为

$$
\begin{aligned}
Cnt =& |\{T_i\}| - |\{T_i \cap T_j | i < j\}| + \cdots + (-1)^{k-1} \left| \left\{ \bigcap_{i=1}^{k} T_{a_i} | a_i < a_{i+1} \right\} \right| \\
& + \cdots + (-1)^{m-1} |\{T_1 \cap \cdots \cap T_m\}| \\
=& \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \cdots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m} \\
=& \binom{m}{0} - \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \\
=& 1 - (1-1)^m = 1
\end{aligned}
$$

于是每个元素出现的次数为 1，那么合并起来就是并集。证毕。

容斥定理

对于全集 U 下的**集合的并**可以使用容斥原理计算，而集合的交则用全集减去**补集的并集**求得：

$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} S_i\right| = |U| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} \overline{S_i}\right|$$

右边使用容斥即可。

容斥经典问题 1

给定 n 个数 $a_1, \ldots, a_n$, 要求将所有数分成两组, 使得两组中元素 or 和相同。
$n \leq 50; 0 \leq a_i \leq 2^{20}$

容斥经典问题 1

按位考虑，如果所有的数在某一位上都为 0，显然可以不用考虑。对于其它的位，如果要满足题目的要求，则必须满足所有这一位为 1 的数不能全部在同一组里. 虽然这个条件不好计数, 但是它的反面是很好计数的!
所以，枚举至少有哪些二进制位不满足条件，然后用并查集维护一下就行了。

容斥经典问题 2

给你一个 N 维超立方体，第 i 个维度的长度为 r_i，同时给你一个 N 维超平面 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = S$ 。这个超平面把超立方体切成至多两部分，求原点所在的那一部分的面积。

$N \leq 500, r_i \leq 500, S \leq 10^9$

容斥经典问题 2

设 $A_n(x)$ 为在 N 维空间里 $S = x$ 且长度没有限制的面积。发现 $A_n(x)$ 是 $A_{n-1}(x_0)$ 在 $[0, x]$ 上的定积分，利用基本的微积分知识，我们可以得到 $A_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ 。
接下来考虑坐标的限制，题目就是要求 $\sum x_i \le S$, 其中每个 $x_i \in [0, r_i]$。考虑容斥. 我们把没有限制的情况, 分别减去 $1, 2, \ldots, n$ 超过限制的情况, 再加上 $1, 2$, $1, 3$ 等同时超过限制的情况...
注意到 $N \times \max r_i$ 不会很大, 上面的容斥很容易利用 DP 优化。

【ZJOI2016】小星星

给你一个 n 个点 m 条边的无向图，再给你一棵 n 个点的树，问有多少种点编号的映射方式，使得 n 个点恰好匹配，且树上的边均存在于原图中。

$n \leq 17, m \leq \frac{n(n-1)}{2}$

【ZJOI2016】小星星

首先考虑一个错误的树形 DP。设 $dp(u,p)$ 表示考虑了以 u 为根这个子树，并且根映射到原图的 p 点. 这个显然可以 $O(n^3)$ 转移，但是有什么问题呢？
不同的点可能映射到同一个点，于是考虑容斥。求出 $dp(S)$ 表示映射的点集至多为 S 时的答案，然后就可以 $O(2^n n^3)$ 做了。

容斥什么时候有用？

容斥什么时候会起作用?
大家可以感受一下:

- $=, \neq$
- $\min, \max$
- $\gcd, \max$
- 恰好，至少

容斥本质上是在凑系数!

容斥凑系数

经典容斥

给定一些条件，问全部满足的对象的个数。答案 = 所有对象 - 至少不满足其中一个的 + 至少不满足其中两个的 - 至少不满足其中三个的 + ...

一般性的容斥

在所有物品中，问在某个条件 C_0 下所有物品的贡献之和．构造一些相对容易计算贡献的条件 $C_1, \ldots, C_n$ ，再对于每个条件构造容斥系数 $f_1, \ldots, f_n$，满足对于每个物品

$$\sum_{i=1}^{n} s(C_i) f_i = s(C_0)$$

其中 $s(C_i)$ 表示这个物品在条件 C_i 下所产生的贡献。对于常见的计数问题，物品的贡献只会是 $0/1$ ，表示这个物品是否满足此条件。

容斥凑系数

错排问题

求长度为 n 的排列 $a_1, \ldots, a_n$ 的个数，满足 $a_i \neq i$

构造 n 个条件：C_i 表示有多少个物品，至少有 i 个位置满足 $a_j = j$。我们用刚才的理解方式来构造容斥系数。对于任意一个恰好有 m 个位置满足 $a_j = j$ 的排列，需要满足

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} f_i = [m = 0]$$

经典容斥系数就是 $f_i = (-1)^i$，给了我们一种 $\mathcal{O}(n^2)$ 递推容斥系数的一般方法。

容斥凑系数

定义每个排列的价值为 a_k，其中 k 为这个排列的错排数，求所有排列的价值之和。只需要构造 f 满足

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} f_i = a_m$$

那么答案为

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (n-i)! f_i$$

“玲珑杯”线上赛 Round 17 B

给定 m 个数 $a_1, \ldots, a_m$，统计 $[1, n]$ 的整数中，满足 $a_1, \ldots, a_m$ 中有奇数个数整除它的数的个数。
$n \leq 10^9, m \leq 15$

“玲珑杯”线上赛 Round 17 B

如果不是奇数个的话，首先肯定枚举 m 个数的一个子集，算出 lcm，然后容斥一下。
如果有这个要求的话，那么容斥系数满足对于每个数，如果它被 k 个数整除，则有

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} = [k \bmod 2]$$

$O(n^2)$ 算就足够了，不过也可以打表找规律

$$f_i = [i \neq 0](-2)^{i-1}$$

min-max 反演

对于普通的 $\min-\max$ 容斥有如下式子：

$$\max(S)=\sum_{T\subseteq S,T\neq\varnothing}(-1)^{|T|+1}\min(T)$$
$$\min(S)=\sum_{T\subseteq S,T\neq\varnothing}(-1)^{|T|+1}\max(T)$$

设最大值为 $x\in S$，那么构造映射 $f(T)\to x\in T\,?\,T-x:T+x$，也就是有 x 就去掉，没有就加上。那么当 T 不为空和 $\{x\}$ 时，T 与 $f(T)$ 因为只相差一个最大值，最小值肯定相同，集合大小只相差 1，就抵消了（一一映射），因为没有空集，所以最后只剩下 $\{x\}$ 的贡献。

上述式子在期望意义下也是成立的：

$$E[\max(S)]=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|T|+1}E[\min(T)]$$

证明可以考虑期望的线性性。

LOJ2542 随机游走

给定一棵 n 个结点的树，你从点 x 出发，每次等概率随机选择一条与所在点相邻的边走过去。
有 Q 次询问，每次询问给定一个集合 S，求如果从 x 出发一直随机游走，直到点集 S 中所有点都至少经过一次的话，期望游走几步。
特别地，点 x 视为一开始就被经过了一次。
$1 \le n \le 18, 1 \le Q \le 5000$ 。

LOJ2542 随机游走

统计点集中最后经过的点的期望，也就是点集中到所有点步数最大值的期望，可以转化为最小值的期望，也就是求经过点集中点步数最少的贡献。
假设我们当前有一个集合 S ，我们用 $f(u)$ 表示从 u 出发，第一次访问 S 中节点的期望步数。

- $u \in S : f(u) = 0$
- $u \notin S$: 令 $d[u]$ 为 u 在树上的度数 (连出来边数) , $\mathrm{ch}[u]$ 为 u 的儿子, $\mathrm{fa}[u]$ 为 u 的父亲。

$$\begin{aligned} f(u) &= [f(\mathrm{fa}[u]) + 1 + \sum (f(\mathrm{ch[u]}) + 1)] \times \frac{1}{d[u]} \\ &= \frac{1}{d[u]} f(\mathrm{fa}[u]) + \frac{1}{d[u]} \sum f(\mathrm{ch}[u]) + 1 \end{aligned}$$

不难发现每个点的答案可以只保留它父亲的答案和一个常数的贡献。假设令它为 $f(u) = A_u f(\mathrm{fa}[u]) + B_u$ 以及 $v = \mathrm{ch}[u]$ 那么有 $\sum f(\mathrm{ch[u]}) = \sum f(v) = \sum (A_v f_u + B_v)$ 把这个回代就有 $(1 - \frac{\sum A_v}{d[u]}) f(u) = \frac{1}{d[u]} f(\mathrm{fa}[u]) + (1 + \frac{\sum B_v}{d[u]})$ 除过去就可以得到每个递推式的 A, B 了，复杂度 $O((n+Q) \cdot 2^n)$ 。

线性基

对于有限维线性空间 V, 设其维数为 n, 则:

1. V 中的任意 $n+1$ 个向量线性相关。
2. V 中的任意 n 个线性无关的向量均为 V 的基。
3. 若 V 中的任意向量均可被向量组 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 线性表出,则其是 V 的一个基。

线性基

线性基在 OI 中的应用一般包含以下方面:

1. 对给定的向量组，找到一组极大线性无关组（或其张成的线性空间的一组基）。
2. 向给定的向量组插入某些向量，在插入操作后的向量组中找到一组极大线性无关组（或其张成的线性空间的一组基）。
3. 对找到的一组极大线性无关组（或基），判断某向量能否被其线性表出
4. 求极大线性无关组（或基）的秩。
5. 对找到的一组极大线性无关组（或基），求其张成的线性空间中的最大元/最小元。

特别地:

- 若限定向量均在 $\mathbb{Z}_2^n$ 下，则称找到的基为**异或线性基**
- 若限定向量均在 $\mathbb{R}^n$ 下，则称找到的基为**实数线性基**

异或线性基构造方法

对原集合的每个数 p 转为二进制，从高位向低位扫，对于第 x 位是 1 的，如果 a_x 不存在，那么令 $a_x \leftarrow p$ 并结束扫描，如果存在，令 $p \leftarrow p \text{ xor } a_x$。

查询原集合内任意几个元素 xor 的最大值，只需将线性基从高位向低位扫，若 xor 上当前扫到的 a_x 答案变大，就把答案异或上 a_x。

为什么能行呢？因为从高往低位扫，若当前扫到第 i 位，意味着可以保证答案的第 i 位为 1，且后面没有机会改变第 i 位。

查询原集合内任意几个元素 xor 的最小值，就是线性基集合所有元素中最小的那个。

查询某个数是否能被异或出来，类似于插入，如果最后插入的数 p 被异或成了 0，则能被异或出来。

也可以通过高斯消元法求线性基，唯一区别就是要消去对应的主元。

线性基性质

按照刚刚的方法，构造的线性基具有如下性质：

- 线性基没有异或和为 0 的子集。
- 线性基中各数二进制最高位不同。

这是一条非常好的性质，能帮我们更方便的解决很多问题。比如：给定一些数，选其中一些异或起来，求异或最大值，如果用贪心法构造线性基，需要再做一遍贪心，如果 ans 的当前位是 0，那么异或一定会更优，否则当前位如果为 1，则一定不会更优。对于其他比较经典的问题（查询一个数能否被异或得到，查询能被异或得到的第 k 大数等），高斯消元法得到的线性基也能更加方便地解决。

BZOJ4671 异或图

定义两个结点数相同的图 G_1 与图 G_2 的异或为一个新的图 G，其中如果 (u,v) 在 G_1 与 G_2 中的出现次数之和为 1，那么边 (u,v) 在 G 中，否则这条边不在 G 中。
现在给定 s 个结点数相同的图 $G_{1\dots s}$，设 $S = G_1, G_2, \cdots, G_s$，请问 S 有多少个子集的异或为一个连通图?
$n \le 10, s \le 60$

BZOJ4671 异或图

连通图计数的一个经典思路就是容斥。
对于这道题，我们先用贝尔数 $bell(n)$ 的时间来枚举 n 个点的子集（联通块）划分，强制连通性至少是这个划分。也就是说，不同子集的两个点之间一定没有边，相同子集的两个点则任意。
对于一个有 m 个连通块的图。令 f_i 为至少有 i 个联通块的容斥系数需要满足

$$\sum_{i=1}^{m} \begin{Bmatrix} m \\ i \end{Bmatrix} f_i = [m = 1]$$

可以斯特林反演，也可以打表找规律得出

$$f_i = (-1)^{i-1}(i-1)!$$

那么问题就转化成，我们只考虑不同子集中的边。对于 s 个边集，有多少种异或方案使得异或和为 0 。
可以利用线性基得到异或方案的，记线性基的元素个数为 tot ，由于之中的元素是线性无关的，其他的 2^{s-tot} 个集合是一定可以通过异或 (或不异或) 线性基里的某些元素得到 0 的，方案数其实就是 2^{s-tot} 。