树

树

- n 个点， $n-1$ 条边的无向连通图。

- 无向无环。
- 任意两个节点的最短路径唯一。
- 任意两个节点的简单路径唯一。
- 所有边都是割边。
- 任意加边都会产生环。

- 森林：
- 每个连通块都是树的一张图。

- 生成树：
- 从一个无向图的边集中选 $n-1$ 条，连通所有点。

- 叶节点：
- $n>1$ 时，度数为1的节点。

有根树

- 有了根，我们可以定义出：
- 父节点
- 深度
- 祖先与后代
- 子树
- 叶节点：没有子节点的节点

特殊的树

- 常用来作为若干档部分分。
- 链
- 菊花

DFS序

- 在dfs过程中，进入和退出节点时将其加入序列末尾。
- 时间戳。
- 简化版本：只有进入时加入序列。

欧拉序

- dfs过程中，每次访问都将其加入序列。

- 给定一棵 n 个点的树。
- 对于所有的 $1 \le i \le j \le n$，求 $dis(i,j)$ 的和。
- $n \le 10^5$

- 以1号点作根。
- 考虑一条边会被几条路径经过。
- $sz_x \times (n - sz_x)$

- 给定一棵 n 个节点的树，以 1 号点为根。
- 你想要用深度优先搜索来遍历这棵树，遍历时的顺序不定。
- 对于每个点，求出它最早和最晚是第几个被搜索到的。
- $n \le 10^5$

5	1 1
1 2	2 3
2 3	3 5
2 4	3 5
1 5	2 5

- 最早：深度。
- 最晚：$n-$子树大小+1。

- luogu9872

- 给定一棵 n 个点的树。
- 你可以花费1个单位时间从某条边的一个端点到达另一个端点。
- 你总共可以使用一次技能，无论你处于哪个节点，你可以花费0的时间传送到1号节点。
- 对于所有的 $k \in [1, n]$ ，求出从1号点出发并最终返回1号点，经过 k 个不同的节点，最少需要花费的时间。
- $n \leq 10^5$

5	0
1 2	1
1 3	2
2 4	4
2 5	6

- 以1号节点为根。
- 若没有传送操作，要经过 k 个不同的节点，无论以何种顺序来遍历，都需要经过 $k-1$ 条边各两次，也就是 $2k-2$ 。
- 传送操作应当用在深度最大的那个节点。
- 设最大深度为 D 。
- 若 $k \le D$ ，则答案为 $k-1$ 。
- 否则，答案为 $2k-2-D$ 。

- luogu9304

最近公共祖先（LCA）

- 对于 x, y，$lca(x, y)$ 是最深的，同时是二者祖先的节点。
- 用于表示 x 到 y 的路径。

倍增法

- 1.跳到同一个深度。
- 2.一起向上跳。

- 预处理：$O(nlogn)$
- 单次询问：$O(logn)$

ST表

- 利用欧拉序，区间内最浅的点。

- 预处理：$O(nlogn)$
- 单次询问：$O(1)$

- 预处理可以较为简单地优化到 $O(n)$，但不常用。

链剖法

- 划分轻重链，哪个的链顶更深就往上跳。
- 跳到同一条重链时，更浅的那个就是 lca 。

- 预处理：$O(n)$
- 单次询问：$O(logn)$

- 每次跳轻边时，子树大小至少翻倍，故至多 $O(logn)$ 次。

- 给定一棵 n 个点的树，边权都是1。
- q 次询问，每次给出三个点 a, b, c ，求出一个点 x ，使得 $dis(a, x) + dis(b, x) + dis(c, x)$ 最小。
- $n, q \leq 10^5$

- 分类讨论。
- 两两之间的lca有三种。
- 若都相等，则就是该点。
- 若有一个与另两个不相等，则选择单独的点。

- bzoj1832

- 给定一棵 n 个点的树，每个节点有一个颜色 c_i 。
- 对于所有颜色，求出属于该颜色的两个节点的最远距离。
- $n \leq 10^5$

- 对于每种颜色，一定会选择该颜色深度最深的那个点。
- 枚举另一个端点即可。

- bzoj1776

- 给定一棵 n 个点的树。
- q 次询问，每次给出三个点 a, b, c，你需要求出有多少个节点满足，以该节点为根时，$lca(a, b) = c$。
- $n \leq 10^5$

- c 要在 (a, b) 上。
- n 减去以 c 为根， a, b 所在的子树大小。

- luogu6374

- 给定一棵 n 个点的树，点有点权 w_i 。
- 对于一个点对 (u,v) ，若它们的最短路径上恰好包含两条边，则会有 $w_u \times w_v$ 的贡献。
- 求所有贡献的和以及贡献的最大值。
- $n \le 10^5$

```
5
1 2
2 3
3 4
4 5
1 5 2 3 10
```

```
20 74
```

- 枚举中间点。
- 设其周围点的权值为 a, b, c 。
- 最大值就是最大的两个的乘积。
- 求和 $2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ 。

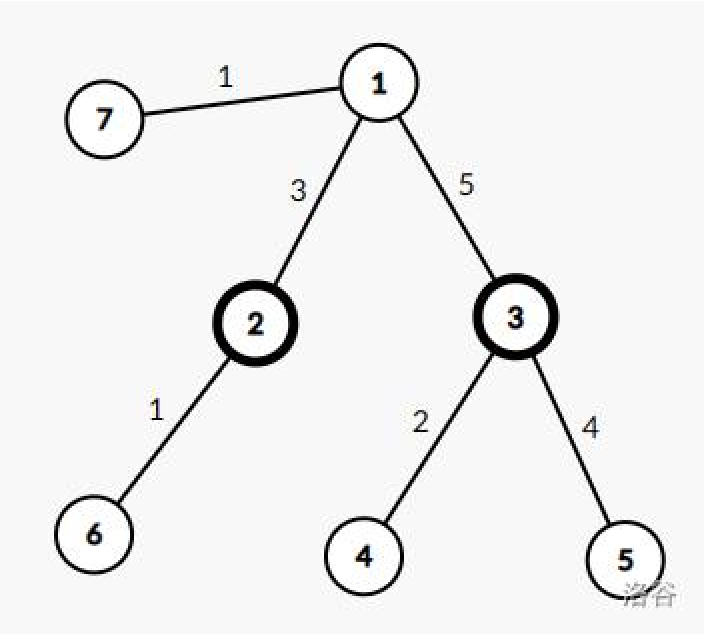
- luogu1351

- 给定一棵 n 个节点的树。
- q 次询问，每次给出 k_i 个节点，你需要回答是否能找到一条简单路径，包含所有的 k_i 个节点。
- $n, q, \sum k_i \leq 10^5$

- 先求出这 k_i 个节点的lca。
- 路径可以被分成两条从底部向上到lca的链。
- 按深度从大到小考虑，每个点被分到哪条中去。

- cf1702G2

- 给定一棵 n 个节点的树，边有边权 w_i 。
- 给定 k 个关键节点。
- q 次询问，每次给出 s,t ，求从 s 到 t ，且经过这 k 个关键点每个至少一次的最短路径长度。
- $n \le 10^5$



- 预处理出包含所有关键点的最小连通块。
- 设连通块内所有边的边权和为 a， s 到 t 的路径长度为 b， s 到 t 的路径与连通块的交的边权和为 c， s 到 t 的路径与连通块的最短距离为 d 。
- 分类讨论：
- 1. s 到 t 的路径与连通块有交
- 答案为 $2 \times (a - c) + b$ 。
- 2. s 到 t 的路径与连通块无交
- 答案为 $2 \times (a + d) + b$ 。
- 也就是说，除了 s 到 t 的路径上的边，其余的必须经过的边都需要走两次。
- 以某个关键点作根会方便处理。
- luogu9433

- 给定一棵 n 个点的树，初始时所有节点都是白色的。
- 你需要支持两种操作：
- $1\ x$
- 将节点 x 染为黑色。
- $2\ x$
- 求一个编号最小的节点 y，使得 y 处在从 x 到某个黑色节点的最短路径上。
- $n \leq 10^6$

- 以第一次染成黑色的节点为根。
- 设 f_i 表示节点 i 到根的路径上所有节点的编号最小值。
- 设一个全局变量 Min，初始时为 INF。
- 对于1操作， $Min = \min\{Min, f_x\}$。
- 对于2操作，输出 $\min\{Min, f_x\}$。

- cf825G

- 给定一棵 n 个点的树，1号点为根，点有点权 a_i 。
- 对于两个深度相同的点对 (x, y)，定义 $f(x, y)$：
- 设 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ 为 x 到根的路径上依次经过的点。
- 设 $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k$ 为 y 到根的路径上依次经过的点。
- 则 $f(x, y) = \sum_{i=1}^{k} a_{p_i} \times a_{q_i}$ 。
- q 次询问，每次需要求一个 $f(x_i, y_i)$ 。
- $n \le 10^5$

- $f(x,y) = a_x \times a_y + f\left(fa_x, fa_y\right)$ 。
- 记忆化用过的 f ，暴力即可。
- 设深度为 i 的节点有 d_i 个。
- 则对于深度为 i 的点对，记录的 f 不超过 $\min\left\{q, d_i^2\right\}$ 个。
- 因此可设 $d_i \le \sqrt{q}$ 。
- 则所有深度记录的点对不超过 $\sum d_i^2$ 。
- $\sum d_i^2 \le (\sum d_i) \times \sqrt{q}$
- 故复杂度为 $O\left(n\sqrt{q}\right)$ 。

- cf1806E