序列相关综合

- n 个区间，最多取多少个，两两之间不相交。
- $n \leq 2000$

- 4
- 0 2
- 0 4
- 3 5
- 4 6

- 3
- [0,2],[0,4],[4,6]

- 离散化后， $f[l][r]$ 表示被 $[l,r]$ 包含的区间最多选多少个。
- 若有区间 $[l,r]$ 一定选。
- 由 $f[l][i]+f[i][r]$ 更新，若存在区间 $[l,i]$ 。

- $O(n^2)$

- cf39C

- 现在给你一个长度为n的整数序列，其中有一些数已经模糊不清了，现在请你任意确定这些整数的值，使得最长严格上升子序列最长。
- $n \leq 10^5$

- 4
- 1 X 2 3

- 3

- 记 f_i 表示长度为 i 的严格最长上升子序列的末尾最小是多少。
- f_i 单调。
- 下一个数 x 确定?
- 在 f 中二分找到最大的 i 使得 $f_i < x$， $f_{i+1} = \min(f_{i+1}, x)$ 。
- 下一个数 x 不确定?
- 对所有 i， $f_{i+1} = f_i + 1$，记一下总共加了多少。

- $O(nlogn)$

- bzoj5427

- 有一个长度为n的字符串，每一位只会是p或j。你需要取出一个子串S（从左到右或从右到左一个一个取出），使得不管是从左往右还是从右往左取，都保证每时每刻已取出的p的个数不小于j的个数。你需要最大化|S|。
- $n \leq 10^5$

- 6
- jpjppj

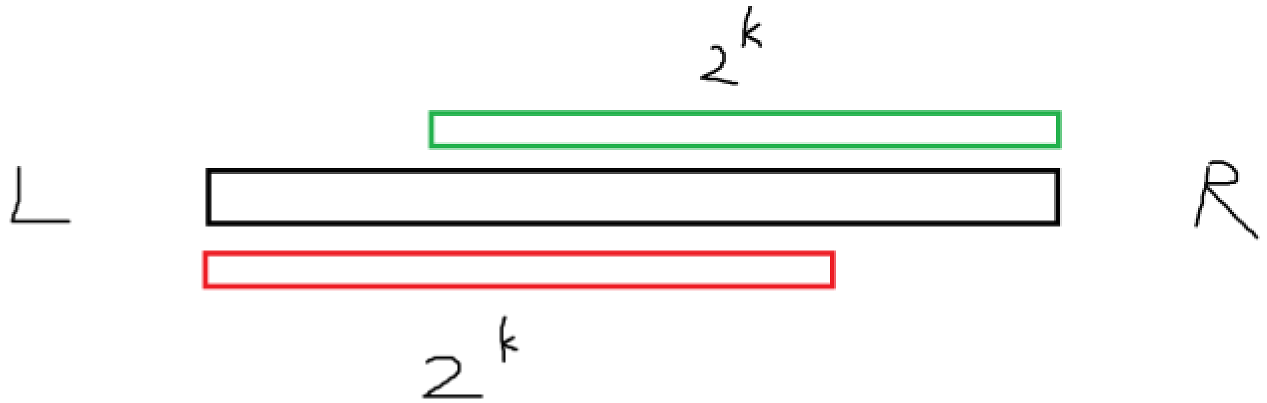
- 4
- pjpp

- p看作1，j看作-1。
- 等价于区间的所有前缀和>=0，所有后缀和>=0。
- 设前缀和数组为A，后缀和数组为B，即：
- $A[r] \geq \max_{l-1 \leq i \leq r-1} A[i], B[l] \geq \max_{l+1 \leq i \leq r+1} B[i]$
- 设 i 左边第一个 j 满足 $A[j] > A[i]$，则 $L[i] = j$。
- 设 i 右边第一个 j 满足 $B[j] > B[i]$，则 $R[i] = j$。
- 区间 $[l, r]$ 合法即为 $l - 1 > L[r]$ 且 $r + 1 < R[l]$。

- 对所有元素求左侧最近的比自己大的元素?
- 若 $i < j$ 且 $a_i \le a_j$ ，则对于在 j 右侧的元素， j 一定比 i 更优。
- 所以有可能成为答案的元素一定满足：
- $i < j < \cdots < k$ ， $a_i > a_j > a_k$ 。
- 加入元素ai?
- while(top&&stk[top]<=ai)top--;
- 此时stk[top]就是ai左侧第一个比ai大的数。
- stk[++top]=ai;

- p看作1，j看作-1。
- 等价于区间的所有前缀和>=0，所有后缀和>=0。
- 设前缀和数组为A，后缀和数组为B，即：
- $A[r] \geq \max\limits_{l-1 \leq i \leq r-1} A[i], B[l] \geq \max\limits_{l+1 \leq i \leq r+1} B[i]$
- 设 i 左边第一个 j 满足 $A[j] > A[i]$，则 $L[i] = j$。
- 设 i 右边第一个 j 满足 $B[j] > B[i]$，则 $R[i] = j$。
- 区间 $[l, r]$ 合法即为 $l - 1 > L[r]$ 且 $r + 1 < R[l]$。
- 枚举 l，就知道了 r 的范围。
- 在范围内找到最大的 r 使得 $l - 1 > L[r]$。
- 二分最远点，看后缀区间内 $L[r]$ 的最小值是否小于 $l - 1$。

- 区间最小值?
- RMQ
- $O(nlogn)$ 预处理， $O(1)$ 查询。
- $f[i][k] = \min\limits_{i \le x \le i+2^k-1} a[x]$



- 原问题总复杂度 $O(nlogn)$ 。
- bzoj5083

- 给定一个长度为n的序列，你有一次机会选中一段连续的长度不超过d的区间，将里面所有数字全部修改为0。
- 请找到最长的一段连续区间，使得修改后该区间内所有数字之和不超过p。
- $n \leq 10^5$

- n p d
- 9 7 2
- 3 4 1 9 4 1 7 1 3

- 5
- 区间[4,1,9,4,1]->[4,1,0,0,1]

- 对区间 $[l, r+1]$ 修改后的最小和一定不小于对区间 $[l, r]$ 修改后的最小和。
- 对于 l 的最大右端点 r 随 l 增大单调不降。
- 双指针。
- 如何选取长度不超过d的子区间?
- 维护区间内所有长度为d的区间和的最大值。
- 若 $i < j$ 且以 i 开头的长为d的区间和小于以 j 开头的长为d的区间和，则可以舍弃 i 。
- 单调栈。

- $O(n)$
- bzoj4385

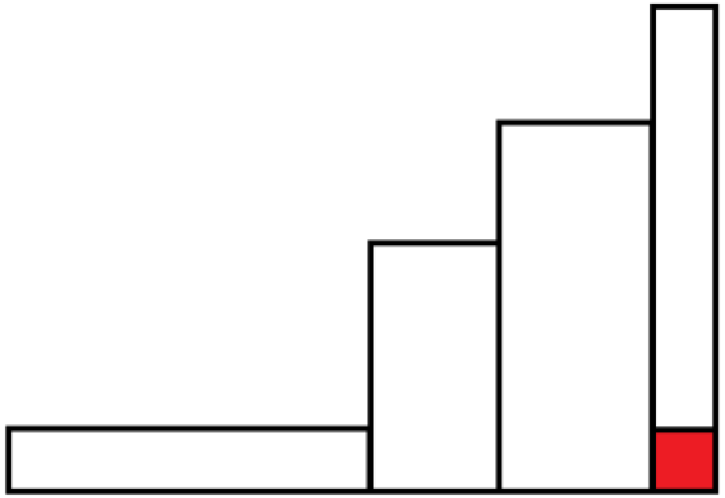
- 给定矩阵，求每行每列都上升的子矩阵数量。
- $n, m \leq 2000$

- 1 3
- 1 2 3

- 6

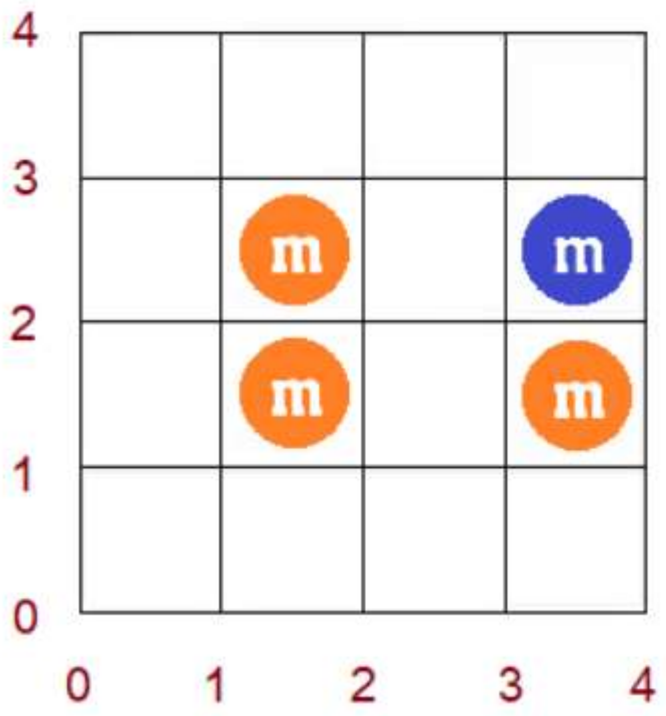
- 考虑以某点为右下角，合法的左上角集合。
- 维护这个单调的高度集合。
- 左上角总数为高度*到下一元素的
- 横坐标之差。

- $O(n^2)$



- $L \times L$ 的二维网格，有 n 个 1×1 小方格内有糖果，颜色为 c_i 。
- 问有多少个矩形，其中包含的糖果取到了所有 k 种颜色。
- $n, k, L \leq 2000$

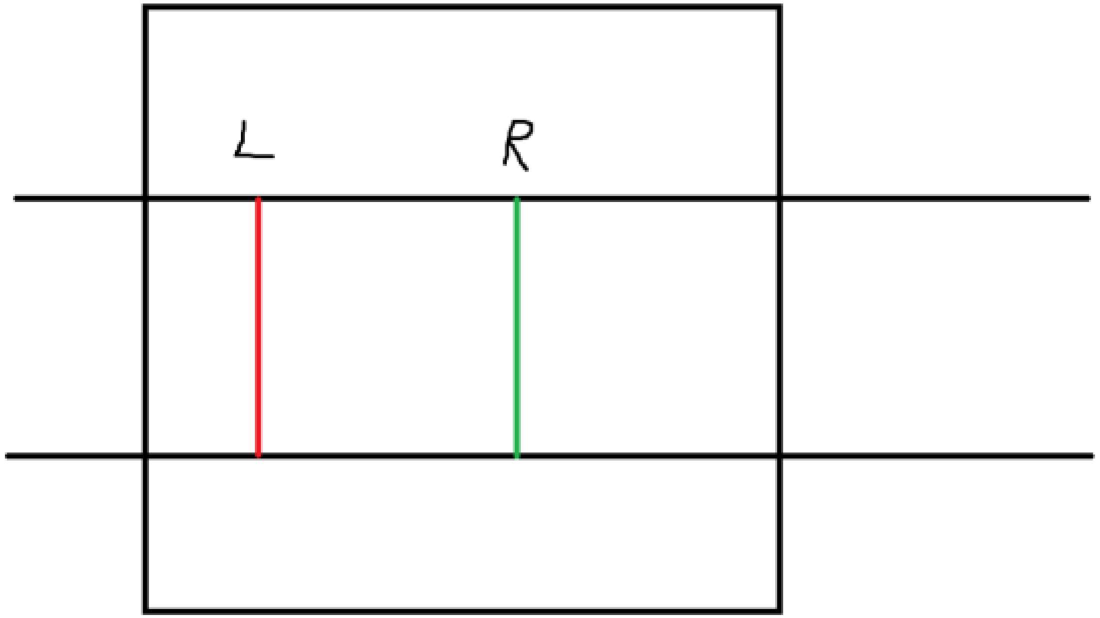
- n k L
- 4 2 4
- 3 2 2
- 3 1 1
- 1 1 1
- 1 2 1



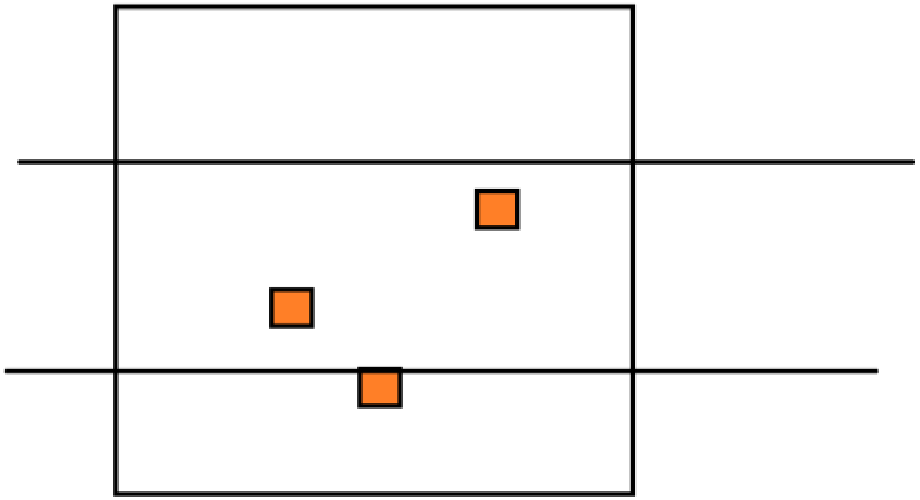
- 20

- 枚举y坐标上下界?

- 对于每个L，找到最小的R
- 使得 $[L, R]$ 包含所有颜色。
- 枚举L时，R单调。
- 双指针。
- $O(n^3)$



- 确定y坐标上下界后，设 f_l 为x坐标为 l 时，最小的 r 。
- 只固定y坐标上界，从下往上枚举y坐标下界，维护 f_i 数组。
- 对于每个即将被删去的糖果，在剩余糖果中找到与它相同颜色的x坐标的前驱和后继。
- 设其下标分别为 i, prv_i, nxt_i 。
- 对于左端点在 $(prv_i, i]$ 之间的，
- 由于删去了i，其右端点可能
- 要取到 nxt_i ，也就是
- $f_x = \max(f_x, nxt_i), prv_i < x \le i$
- set维护前驱后继，线段树维护区间max全局和
- $O(n^2 logn)$
- cf1396D

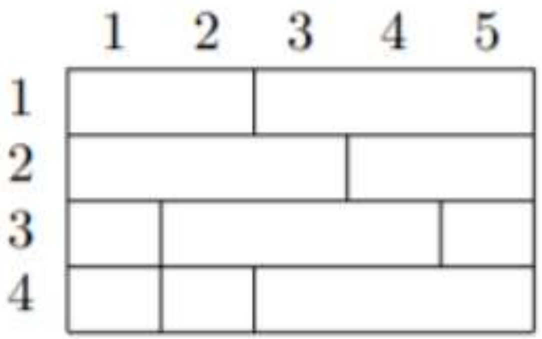


- 数轴上n条线段，只知道一个端点的位置和长度。
- 给所有端点定向（左或右），最大化覆盖长度。
- $n \leq 100$
- 3
- 1 1
- 2 2
- 3 3

- 5
- [0,2],[3,6]

- 按端点排序，从左往右dp，记录覆盖的最右位置，线段向右的情况容易考虑。
- 线段向左的情况，可能会包含之前的若干线段，在更靠左的位置产生贡献。
- 设这些被包含的线段贡献均为0（不一定最优，但能取到最优），枚举这样的线段数量来转移。
- 被包含的区间可能有向右超出当前线段端点的情形，产生额外贡献。
- $f[i][j] \to f[k][r]$， $[i+1, k-1]$ 这些线段强制向右，取最大右端点。
- $O(n^3)$
- cf559E

- 一个 $n \times m$ 的网格，每一行会被分为若干段。
- 每一段可以选择一个一个位置填1，剩余位置填0。
- 最大化每一列的和的平方和。
- $n, m \le 100$
- $4^2 + 2^2 + 4^2 = 36$



	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	1
2	1	0	0	0	1
3	1	1	0	0	1
4	1	1	0	0	1

- 设 $f[l][r]$ 表示考虑第 l 列到第 r 列的最优答案。
- 考虑 $[l,r]$ 中1最多的列为 $x(l \le x \le r)$ ，则该列会尽量多放1。
- 枚举这样的列，然后划分为两半 $f[l][x-1], f[x+1][r]$ 。
- 对于不被 $[l,r]$ 完全包含的区间，可以认为它已经在其它列被放了1。
- 所以枚举 x 后，完全被 $[l,r]$ 包含且包含 x 的区间就是这一列1的数量。

- $O(n^3)$
- cf1372E

- 一个长为n的排列a和一个k。
- 第一步：你可以往排列中插入k个0。
- 第二步：每次可以把一个与0相邻的非0数放到序列的任意位置，直至非0数字有序。
- 对1-n的所有k，在你每一步都是最优操作的前提下，求第二步的最少操作次数。
- $n \leq 500$
- 6
- 2 3 1 4 6 5
- 3 2 2 2 2 2
- [2,3,1,4,6,5]->[2,3,1,4,0,6,5]->[2,3,4,1,0,6,5]->[1,2,3,4,0,6,5]
- ->[1,2,3,4,0,5,6]

- 取一个上升子序列 S ，这些数字不需要进行操作，因此操作次数为 $n-|S|$ ，需要的0的个数为 S 将序列分成的段数。
- $f[i][j]$ 表示前 i 个数，上升子序列以 i 结尾，分成的段数为 j ，上升子序列的最大长度。
- 若 $a_i < a_{i+1}$ ： $f[i][j]+1 \to f[i+1][j]$
- 若 $a_i < a_k(k > i+1)$ ： $f[i][j]+1 \to f[k][j+1]$

- $O(n^3)$

- cf1839D

- n 个人，每个人都要给一个 $[1,m]$ 之间的整数，且每个 $[1,m]$ 间的整数需至少给一个人。
- 每个人有一个阈值 a_i，若与第 i 个人拥有相同数字的人数至少为 a_i（包括自己），那么他就是高兴的。
- 多次询问，每次一个 m，求最多高兴人数。
- $n \le 3 \times 10^5$
- 5
- 1 2 2 2 2
- 3
- 2 3 4

1 2 2 2 2
1 2 2 3 3
1 2 2 3 4

- 5 5 3

- 按 a_i 排序，一定是从前往后一段一段分组。

- 设 $f[i]$ 表示前 i 个人都高兴，至多分为几段。
- $f[i] = \max\limits_{0 \le j \le i-a_i} f[j] + 1 (a_i \le i)$
- $a_i \le i$：高兴人数为 i，整数范围至多为 $f[i] + n - i$。
- $a_i > i$：高兴人数为 i，整数范围至多为 $n - a_i + 1$。

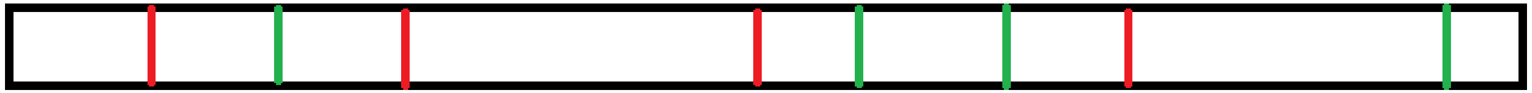
- $O(nlogn)$
- cf1793E

- 长为 n 的序列 a， q 次询问 x_i, y_i ，求出最短的包含这两个数的区间长度。
- $n, q \leq 10^5$

- 5 2
- 1 3 2 3 1
- 1 2
- 1 3

- 3
- 2

- 找两个数距离最近的出现位置。
- 二者出现次数都少：归并两数出现位置。



- 否则：出现次数较多的数 $O(n)$ 预处理。
- 设阈值为 K 。
- 预处理：最多 $\frac{n}{K}$ 个这样的数，复杂度 $\frac{n^2}{K}$ 。
- 询问：$q \times K$ 。
- $\frac{n^2}{K} = qK, K = \frac{n}{\sqrt{q}}$
- $O(n\sqrt{q})$
- cf444D

- n 个物品，选择第 i 个物品有代价 c_i 。
- 小A喜欢一些物品，小B喜欢一些物品。
- 选择恰好 m 个，二人都有至少 k 个喜欢，最小化代价。
- $n \leq 10^5$

- $n = 4, m = 3, k = 2$
- $c = \{3,2,2,1\}$
- 小A喜欢 $\{1,2\}$ ，小B喜欢 $\{1,3,4\}$ 。

- 选择 $\{1,2,4\}$ ，代价和为 $3 + 2 + 1 = 6$ 。

- 分为四组：都不喜欢、A喜欢、B喜欢、都喜欢，分别排序。
- 答案肯定会选每组里最大的若干个。
- 枚举第四组选取个数 t ，第二三组至少要选 $k-t$ 个，再从剩余所有未选里取前 $m-t-2\times(k-t)$ 大。

- $O(nlogn)$

- cf799E