

声明：本课件及视频版权归小武老师所有，禁止任何组织及个人分发、抄袭、售卖等，违者将追究其法律责任！

# 《CSP-J 初级组**算法中数学**》

Day10-计数原理与排列组合

(下)

主讲人：小武老师



## 课程大纲



### 1 初等数论(上)

奇数、偶数、质数、合数、约数、倍数、因数、最小公倍数、最大公约数、欧几里得算法等

### 2 初等数论(中)

算术基本定理、同余关系、孙子定理等

### 3 初等数论(下)

质数判定、质数筛、埃氏筛法、线性筛法等

### 4 函数(上)

坐标、函数图像、一次函数、变量与函数等

### 5 函数(下)

二次函数、指数函数、对数函数、根式与指数幂、幂运算等

### 6 数列基础

等差数列、等比数列、递推公式、通项公式等

### 7 矩阵基础

一维矩阵、二维矩阵、矩阵的运算、转置、杨辉三角等

### 8 数及其运算

数的进制、二进制、八进制、十六进制、编码(ASCII)等

### 9 计数原理与排列组合(上)

加法原理、乘法原理、排列与组合、再看杨辉三角等

### 10 计数原理与排列组合(下)

捆绑法、插空法、CSP真题训练等

声明：本课件及视频版权归小武老师所有，禁止任何组织及个人分发、抄袭、售卖等，违者将追究其法律责任！

# 排列与组合

真题演练 备战CSP初赛





## 排列与组合



### 排列

$n$  个不同元素中取出  $m$  个元素并按一定顺序排成一列

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

### 组合

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$n$  个不同元素中取出  $m$  个元素的一个组合

$$C_5^3 = \frac{A_5^3}{A_3^3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$



## 捆绑法



### 例1-照相（相邻问题捆绑处理）

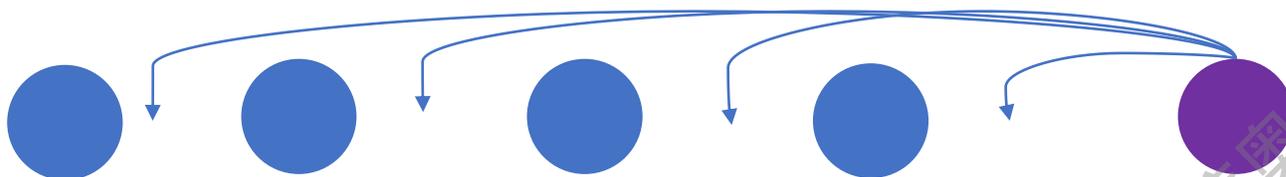
有6个人排成一队照相，其中甲乙两人必须相邻，请问有多少种排法？

方法一：



$$A_5^5 \times A_2^2 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 240$$

方法二：



$$A_4^4 \times 5 \times 2 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 2 = 48$$



## 捆绑法



### 例2-开会(相邻问题捆绑处理，特殊情况优先考虑)

在某场新冠肺炎疫情视频会议中，甲、乙、丙、丁、戊五位疫情防控专家分别按一定的顺序发言，其中甲必须排在前两位，丙、丁必须排在一起，则五位专家不同的发言顺序共有多少种？



甲在1时：

$$A_3^3 \cdot A_2^2 = 3 \times 2 \times 2 = 12$$



甲在2时：

第一只能放乙和戊，剩下两个位置

$$A_2^1 \cdot A_2^2 \cdot A_2^2 = 8$$

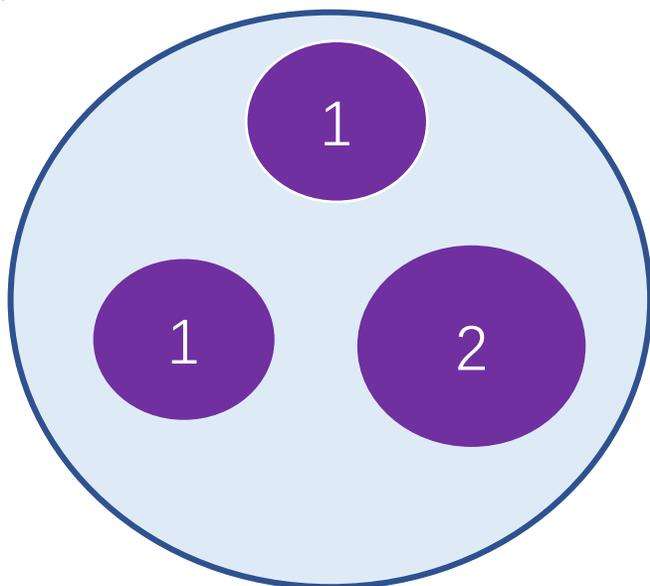


## 捆绑法



### 例3- 放小球

把4个不同的小球全部放入3个不同的盒子中，使每个盒子都不空的放法总数为？



$$C_4^2 \cdot A_3^3 = 36$$

可达信奥—小武老师—keda.ac

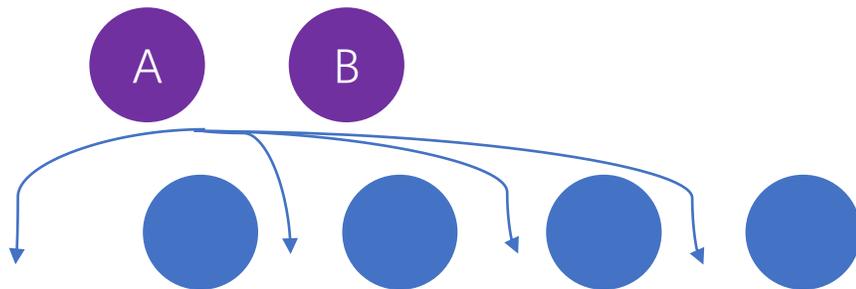


## 插空法



### 例1-考试(不相邻就插空)

本次模拟考试结束后，班级要排一张语文、数学、英语、物理、化学、生物六科试卷讲评顺序表，化学排在生物前面，数学与物理不相邻且都不排在最后，则不同的排表方法共有多少种？



分析

第一步：先放化、生，再放语、英

$$C_4^2 \cdot A_2^2 = 12 \quad \text{或} \quad A_4^4 / 2 = 12$$

第二步：数、物插空

$$A_4^2 = 12$$



## 捆绑法



### 例2 排数字

只用1,2,3,4 四个数字组成一个5位数，规定这四个数字必须同时使用，且同一数字不能相邻出现，这样的五位数有多少个？

分析

当重复为1的时候，先排列 2,3,4,再放1

$$A_3^3 C_4^2 = 36$$

其他数字同理，因此，最终结果为：

$$A_3^3 C_4^2 \times 4 = 144$$



## 特殊优先



特殊元素，优先处理；特殊位置，优先考虑。

**例1：**六人站成一排，求：

(1) 甲、乙既不在排头也不在排尾的排法数

(2) 甲不在排头，乙不在排尾，且甲乙不相邻的排法数

分析 (1)



$$A_4^2 \cdot A_4^4 = 12 \times 24 = 288$$

4个位置选2个放甲乙，剩下的全排列

$$A_4^4 (A_3^2 + C_3^1 A_2^2) = 24 \times 12 = 288$$

先排剩下的，再把甲乙插空，(甲乙还可以相邻)



## 特殊优先



例1：六人站成一排，求：

(1) 甲、乙既不在排头也不在排尾的排法数

(2) 甲不在排头，乙不在排尾，且甲乙不相邻的排法数

312



### 分析 (2)

第一类：甲在排尾，乙在排头

第二类：甲在排尾，乙不在排头，甲乙不相邻

第三类：乙在排头，甲不在排尾

第四类：甲不在排尾也不在排头，乙不在排头也不在排尾

$$A_4^4$$

$$A_3^1 A_4^4$$

$$A_3^1 A_4^4$$

$$A_4^4 \cdot A_3^2$$



## 捆绑与插空



例：8人排成一队

(1) 甲乙必须相邻

$$A_7^7 A_2^2$$

(2) 甲乙不相邻

$$A_6^6 A_7^2$$

(3) 甲乙必须相邻且与丙不相邻

$$A_5^5 A_6^2 A_2^2$$

(4) 甲乙必须相邻，丙丁必须相邻

$$A_6^6 A_2^2 A_2^2$$



# CSP 真题



例2 10个三好学生名额分配到7个班级，每个班至少有一个名额，一共有多少种不同的分配方案？

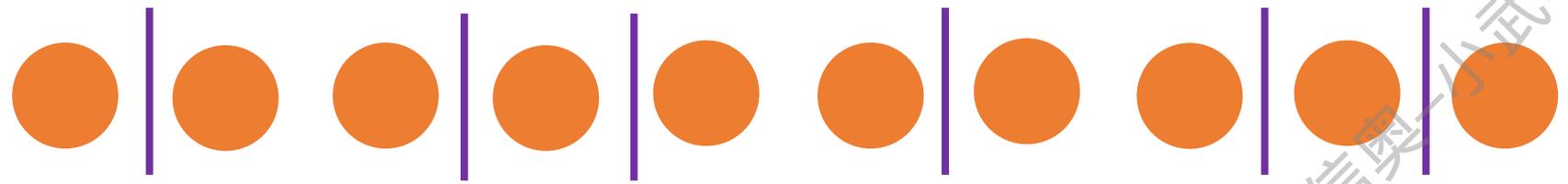


3

1, 1, 1

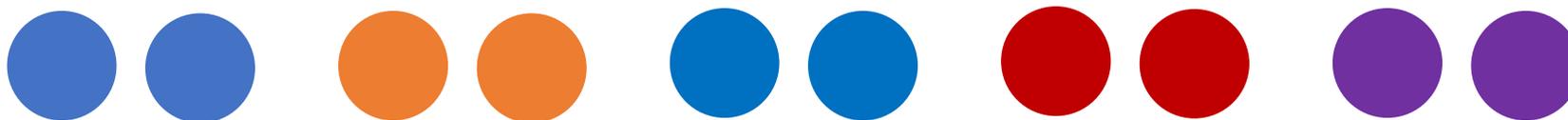
$$C_7^1 + C_7^3 + A_7^2$$

1, 2



十个名额，有9个空，插入6个板，会分成7个区域，每个区域就是每个班的名额数。

**例4** 有五副不同颜色的手套（共 10 只手套，每副手套左右手各 1 只），一次性从中取 6 只手套，请问恰好能配成两副手套的不同取法有（ ）种。



$$C_5^2 C_3^2 C_2^1 C_2^1 = 120$$

**分析：** 6只手套，恰好配成2副，意味着从五副手套选两套，剩下的三套里面选两种，每种各选一只



## 抽屉原理



桌上有十个苹果，要把这十个苹果放到九个抽屉里，无论怎样放，我们会发现至少会有一个抽屉里面放不少于两个苹果。这一现象就是我们所说的“**抽屉原理**”。

- 1、把 98 个苹果放到 10 个抽屉里，无论怎么放，我们一定能找到一个含苹果最多的抽屉，它里面至少有？ 个苹果。 **10**
- 2、1000 只鸽子飞进 50 个巢，无论怎么飞，我们一定能找到一个含鸽子最多的巢，它里面至少有？ 只鸽子。 **20**
- 3、从 8 个抽屉里拿出 17 个苹果，无论怎么拿，我们一定能拿到苹果最多的那个抽屉，从它里面至少拿出？个苹果。 **3**

抽屉原理的一般含义为：“如果每个抽屉代表一个集合，每一个苹果就可以代表一个元素，假如有  $n+1$  个元素放到  $n$  个集合中去，其中必定有一个集合里至少有两个元素。” 抽屉原理有时也被称为鸽巢原理。



## 总结



### 1 初等数论(上)

奇数、偶数、质数、合数、约数、倍数、因数、最小公倍数、最大公约数、欧几里得算法等

### 2 初等数论(中)

算术基本定理、同余关系、孙子定理等

### 3 初等数论(下)

质数判定、质数筛、埃氏筛法、线性筛法等

### 4 函数(上)

坐标、函数图像、一次函数、变量与函数等

### 5 函数(下)

二次函数、指数函数、对数函数、根式与指数幂、幂运算等

### 6 数列基础

等差数列、等比数列、递推公式、通项公式等

### 7 矩阵基础

一维矩阵、二维矩阵、矩阵的运算、转置、杨辉三角等

### 8 数及其运算

数的进制、二进制、八进制、十六进制、编码(ASCII)等

### 9 计数原理与排列组合(上)

加法原理、乘法原理、排列与组合、再看杨辉三角等

### 10 计数原理与排列组合(下)

捆绑法、插空法、CSP真题训练等

## 课后习题与实验

Talk is cheap, show me the code !



声明：本课件及视频版权归小武老师所有，禁止任何组织及个人分发、抄袭、售卖等，违者将追究其法律责任！

下节课见啦！

可达信奥—小武老师—keda.ac

可达信奥—小武老师—keda.ac