《CSP-J 初级组算法中数学》

Day09-计数原理与排列组合
(上)

主讲人：小武老师

课程大纲

1 初等数论 (上)
奇数、偶数、质数、合数、约数、倍数、因数、最小公倍数、最大公约数、欧几里得算法等

2 初等数论 (中)
算术基本定理、同余关系、孙子定理等

3 初等数论 (下)
质数判定、质数筛、埃氏筛法、线性筛法等

4 函数 (上)
坐标、函数图像、一次函数、变量与函数等

5 函数 (下)
二次函数、指数函数、对数函数、根式与指数幂、幂运算等

6 数列基础
等差数列、等比数列、递推公式、通项公式等

7 矩阵基础
一维矩阵、二维矩阵、矩阵的运算、转置、杨辉三角等

8 数及其运算
数的进制、二进制、八进制、十六进制、编码（ASCII）等

9 计数原理与排列组合 (上)
加法原理、乘法原理、排列与组合、再看杨辉三角等

10 计数原理与排列组合 (下)
捆绑法、插空法、CSP真题训练等

加法原理

计数原理是数学中的重要研究对象之一，分类加法计数原理、分步乘法计数原理是解决计数问题的最基本、最重要的方法，也称为基本计数原理，它们为解决很多实际问题提供了思想和工具。

可达信奥—小武老师—keda.ac

加法原理

完成一个工程可以有n类办法，$a_i(1 \le i \le n)$ 代表第 i 类方法的数目。那么完成这件事共有 $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 种不同的方法。

比如说：从武汉到上海有乘火车、飞机、轮船3种交通方式可供选择，而火车、飞机、轮船分别有k1，k2，k3个班次，那么从武汉到上海共有 k1+k2+k3种方式可以到达。

可达信奥—小武老师—keda.ac

加法原理

例1 从甲地到乙地，能够乘火车，也能够乘汽车，还能够乘轮船。一天中火车有4班，汽车有3班，轮船有2班。问：一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地，共有多少种不同走法？

分析与解：一天中乘坐火车有4种走法，乘坐汽车有3种走法，乘坐轮船有2种走法，因此一天中从甲地到乙地共有：4＋3＋2=9（种）不同走法。

例2 旗杆上最多能够挂两面信号旗，现有红色、蓝色和黄色的信号旗各一面，假如用挂信号旗表示信号，最多能表示出多少种不同的信号？

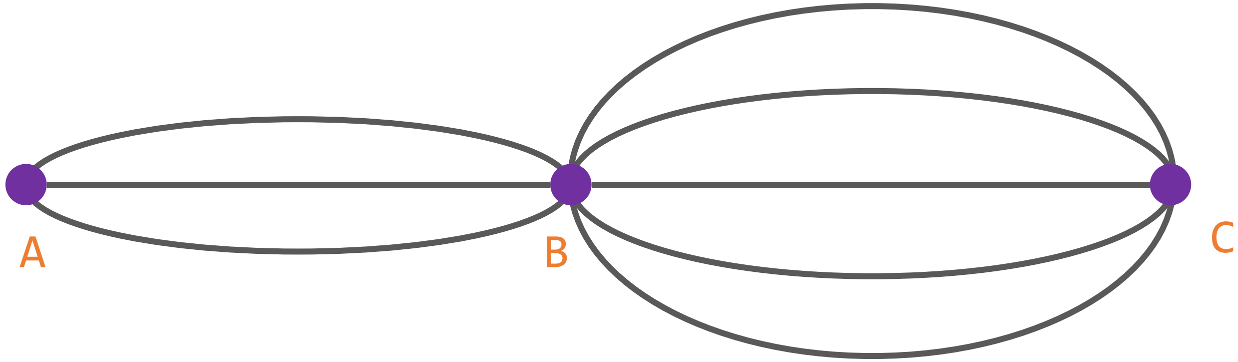
分析与解：依照挂信号旗的面数能够将信号分为两类。第一类是只挂一面信号旗，有红、黄、蓝3种；第二类是挂两面信号旗，有红黄、红蓝、黄蓝、黄红、蓝红、蓝黄6种。因此一共能够表示出不同的信号

3＋6=9（种）

乘法原理

完成一件事情需要分 n 个步骤， $a_i(1 \leq i \leq n)$ 代表第 i个步骤的不同方法数目。那么完成这件事共有 $\mathrm{S} = \mathrm{a}_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ 种不同的方法。

假如A点到B点有3条路，B点到C点有5条路，请问A点到C点有几条路？



还能举出其它例子吗？

乘法原理

如果每个小方格里只能放1和0，那么8个小方格总共可以有多少种表示方法？

1	0	1	1	1	0	1	0

$$S = 2 \times 2 \times 2 \cdots 2 = 2^8 = 256$$

$$00000000 \sim 11111111$$

$$1byte = 8bit$$

班级有20名同学，每个小格子只有1和0，如果每个同学给一个唯一的编号，请问至少需要多少个小格子？

排列组合

排列组合是组合学最基本的概念。所谓排列，就是指从给定个数的元素中取出指定个数的元素进行排序。组合则是指从给定个数的元素中仅仅取出指定个数的元素，不考虑排序。

可达信奥—小武老师—keda.ac

排列

4个同学站成一排，有多少种不同的排法？

Permutation 排列

4	3	2	1

$$S = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

可达信奥–小武老师–keda.ac

排列

从n个不同元素中，任取 m（m ≤ n,m 与 n 均为自然数）个元素按照一定的顺序排成一列，叫做从 n个不同元素中取出m 个元素的一个排列；从n 个不同元素中取出m(m≤n) 个元素的所有排列的个数，叫做从n个不同元素中取出m个元素的排列数，用符号 A_m^n 表示。排列的计算公式如下：

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

说明：n!表示n的阶乘 $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$

排列

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$A_5^3 = \quad 5 \times 4 \times 3 = 60$

$A_4^3 = \quad 4 \times 3 \times 2 = 24$

$A_6^2 = \quad 6 \times 5 = 30$

$A_6^1 = \quad 6$

$A_3^3 = \quad 3 \times 2 \times 1 = 6$

$A_5^5 = \quad 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

排列

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

全排列： n个人全部来排队 。第一个位置可以选n个，第二位置可以选n-1 个，以此类推得：

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\times 2\times 1 = n!$$

全排列是排列数的一个特殊情况

NOI

排列

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

例1 从5本书中选3本书，送给3个人，问有多少种分法?

方法一：

5	4	3

方法二：

$$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

方法三：

$$C_5^3 A_3^3$$

可达信奥–小武老师–keda.ac

排列

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

例2 有5个人排成一队照相，其中甲乙两人必须相邻，请问有多少种排法?

方法一：

$$A_4^4 \times A_2^2 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 = 48$$

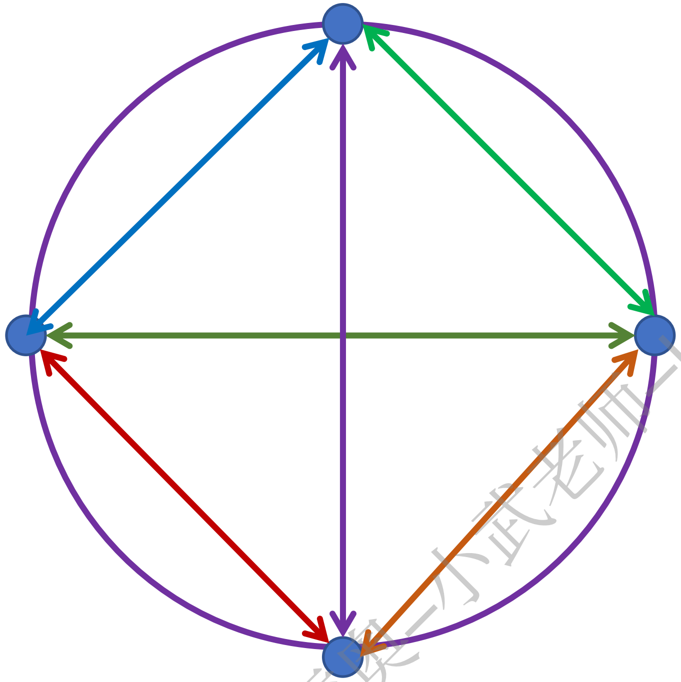
方法二：

$$A_3^3 \times 4 \times 2 = 3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 2 = 48$$

组合

4个同学两两一组，有多少种不同的组合？

Combination　组合



组合

从n 个不同元素中，任取 m(m ≤ n) 个元素组成一个集合，叫做从n 个不同元素中取出 m个元素的一个组合；从n 个不同元素中取出 m(m ≤ n)个元素的所有组合的个数，叫做从n个不同元素中取出m个元素的组合数。用符号C_n^m来表示。组合数计算公式：

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

如何理解上述公式？我们考虑 n个人 m(m≤n)个出来，不排队，不在乎顺序则有C_n^m种 。如果在乎排列那么就是A_n^m $，如果不在乎那么就要除掉重复，那么重复了多少？同样选出的来的 m个人，他们还要“全排”得 A_n^m，所以得:

$$C_n^m \times m! = A_n^m$$

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

组合

从n 个不同元素中，任取 m(m ≤ n) 个元素组成一个集合，叫做从n 个不同元素中取出 m个元素的一个组合；从n 个不同元素中取出 m(m ≤ n)个元素的所有组合的个数，叫做从n个不同元素中取出m个元素的组合数。用符号C_n^m来表示。组合数计算公式：

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$C_5^3 = \frac{A_5^3}{A_3^3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

$$C_5^2 = \frac{A_5^2}{A_2^2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

$$C_6^2 = \frac{A_6^2}{A_2^2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

$$C_6^4 = \frac{A_6^4}{A_4^4} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2} = 15$$

$$C_3^3 = 1$$

$$C_5^5 = 1$$

$$C_5^1 = 5$$

组合

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

例3 有6名航天员，选出其中的4名进行神舟十四号载人飞船发射任务，请问有多少种方法?

$$C_6^4 = C_6^2 = 6 \times 5/2 = 15$$

例4 10人分乘3辆汽车，要求甲车坐5人，乙车坐3人，丙车坐2人，则有多少种不同的乘车方法?

$$C_{10}^5 C_5^3 C_2^2$$

可达信奥-小武老师-keda.ac

组合

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

例5 有6只不同的灯泡，5个不同的灯座，现在要从中选配成2盏灯，共有多少种不同的选配方法?

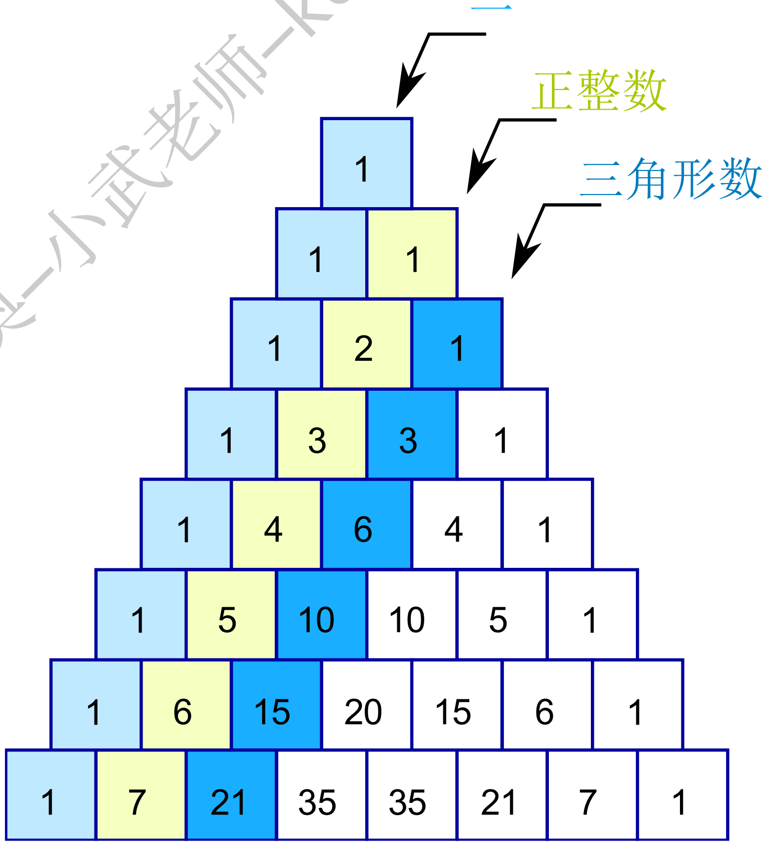
$$C_6^2 C_5^2 A_2^2$$

例6 10人分乘3辆汽车，要求甲车坐5人，乙车坐3人，丙车坐2人，则有多少种不同的乘车方法?

$$C_{10}^5 C_5^3 C_5^2 = C_{10}^3 C_7^5 C_2^2$$

可达信奥-小武老师-keda.ac

再看杨辉三角



$$C_0^0$$
$$C_1^0 \quad C_1^1$$
$$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$$
$$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$$
$$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$$

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$$

杨辉三角

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

杨辉三角的递推公式:

$$a[i][j] = a[i-1][j] + a[i-1][j-1]$$

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$$

注意循环边界条件，初始化时把 a[i][1] 和 a[i][i] 均赋为1。

总结

- 排列组合
  - 加法原理
    - 分类计数原理
  - 乘法原理
    - N个步骤
  - 排列
    - 排列数
    - 乘法原理
  - 组合
    - 组合数
    - 性质

课后习题与实验

Talk is cheap, show me the code !

下节课见啦！

可达信奥-小武老师-keda.ac