《CSP-J 初级组算法中数学》

Day07-矩阵基础

主讲人：小武老师

可达信奥—小武老师—keda.ac

课程大纲

1 初等数论 (上)
奇数、偶数、质数、合数、约数、倍数、因数、最小公倍数、最大公约数、欧几里得算法等

2 初等数论 (中)
算术基本定理、同余关系、孙子定理等

3 初等数论 (下)
质数判定、质数筛、埃氏筛法、线性筛法等

4 函数 (上)
坐标、函数图像、一次函数、变量与函数等

5 函数 (下)
二次函数、指数函数、对数函数、根式与指数幂、幂运算等

6 数列基础
等差数列、等比数列、递推公式、通项公式等

7 矩阵基础
一维矩阵、二维矩阵、矩阵的运算、转置、杨辉三角等

8 数及其运算
数的进制、二进制、八进制、十六进制、编码（ASCII）等

9 计数原理与排列组合 (上)
加法原理、乘法原理、排列与组合、再看杨辉三角等

10 计数原理与排列组合 (下)
捆绑法、插空法、CSP真题训练等

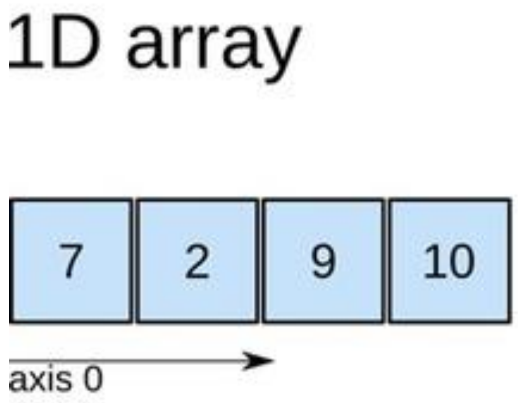
可达信奥—小武老师—keda.ac

矩阵

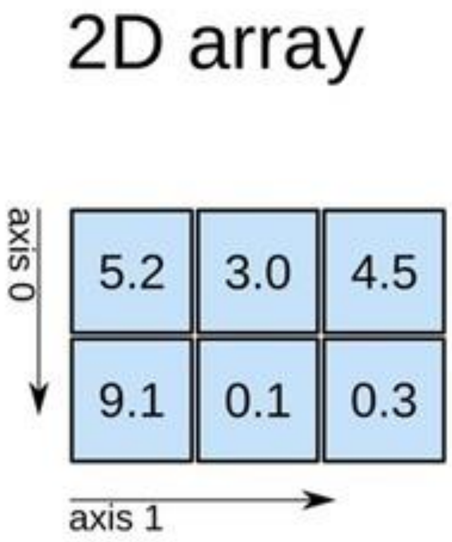
一维矩阵、二维矩阵、矩阵运算、转置、杨辉三角

可达信奥–小武老师–keda.ac

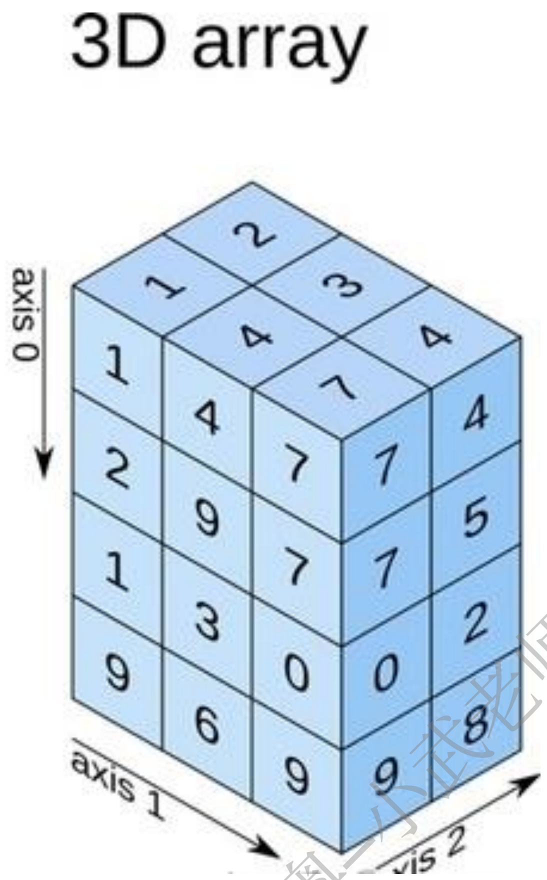
什么是矩阵?



一维矩阵



二维矩阵



三维矩阵

可达信奥-小武老师-keda.ac

什么是矩阵?

定义：由m×n个数(i=1,2,……,m; j=1,2,3,……,n)排成的m行n列的矩形阵式。

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=[a_{ij}]$$

称A为一个m行n列的矩阵，或m× n矩阵

可达信奥–小武老师–keda.ac

什么是矩阵?

如果矩阵的行数不等于列数，则称其为矩形矩阵。如果矩阵的行数等于列数，则称其为方阵。如果矩阵只有一列，就称它为列矩阵，只有一行，那么它就是一个行矩阵。

$$A = \begin{bmatrix} 1402 & 191 \\ 1371 & 821 \\ 949 & 1437 \\ 147 & 1448 \end{bmatrix}$$

矩形矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 12 & 11 & 31 & 11 \\ 71 & 21 & 81 & 11 \\ 49 & 17 & 11 & 11 \\ 17 & 48 & 21 & 11 \end{bmatrix}$$

方阵

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 49 \\ 17 \end{bmatrix}$$

列矩阵（向量）

什么是矩阵?

对角矩阵—如果主对角线中至少有一个元素非零且其他元素都为零，则称方阵为对角线矩阵。

比例矩阵—如果一个对角矩阵的所有对角元素都相同，则称方阵为比例矩阵。

单位矩阵—如果一个对角矩阵的所有对角元素都等于1，则称这个对角矩阵为单位矩阵。

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

对角线矩阵

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

比例矩阵

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

单位矩阵

什么是矩阵?

三角矩阵—如果一个方阵在主对角线以上的所有元素都为零(下三角矩阵)，或者在主对角线以下的所有元素都为零(上三角矩阵)，那么这个方阵就是三角形的。

零矩阵—如果矩阵的所有元素都等于零，则称它为零或零矩阵，用0表示。

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&3&0&0\\4&5&6&0\\7&8&9&1\end{bmatrix}$$

下三角矩阵

$$D=\begin{bmatrix}2&1&2&3\\0&2&4&5\\0&0&2&6\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

上三角矩阵

$$O=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

零矩阵

矩阵转置

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

矩阵加减法

$$C_{ij} = A_{ij} \pm B_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0.5 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0.5 \\ 4 & 10 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0.5 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0.5 & 2 \\ 4 & 10 & 8 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

只有同型矩阵之间才可以进行加法运算，将两个矩阵相同位置的元相加即可，m行n列的两个矩阵相加后得到一个新的m行n列矩阵。

矩阵标量乘法

$$\lambda A = A\lambda = \begin{Bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{Bmatrix}$$

$$3 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 15 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times 5 = \begin{bmatrix} 1 \times 5 & 3 \times 5 \\ 4 \times 5 & 0 \times 5 \\ 2 \times 5 & 1 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 20 & 0 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

矩阵乘法

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & 5\\2 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times0+1\times2 & 2\times5+1\times6\\2\times0+3\times3 & 2\times5+3\times6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 16\\9 & 28\end{bmatrix}$$

"Dot Product"

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}7 & 8\\9 & 10\\11 & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}58 & \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_0 & a_1\\a_2 & a_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}b_0 & b_1\\b_2 & b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_0\times b_0+a_1\times b_2 & a_0\times b_1+a_1\times b_3\\a_2\times b_0+a_3\times b_2 & a_2\times b_1+a_3\times b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_0 & c_1\\c_2 & c_3\end{bmatrix}$$

矩阵乘法

$$A=[a_{ij}]_{m\times n},B=[b_{ij}]_{n\times s}$$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

$$C=AB=[c_{ij}]_{m\times s}=\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right]_{m\times s}$$

$$\begin{bmatrix}a_0 & a_1\\ a_2 & a_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}b_0 & b_1\\ b_2 & b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_0\times b_0+a_1\times b_2 & a_0\times b_1+a_1\times b_3\\ a_2\times b_0+a_3\times b_2 & a_2\times b_1+a_3\times b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_0 & c_1\\ c_2 & c_3\end{bmatrix}$$

$$m\times n,n\times s\rightarrow m\times s$$

注意：只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘。

可达信奥-小武老师-keda.ac

矩阵乘法

例子： 设A, B 分别是n×1和1×n矩阵，且： $A=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$ $B=[b_1,b_2,\dots,b_n]$ 计算 AB 和 BA。

$$AB=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}[b_1,b_2,\dots,b_n]=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\\dots & \dots & \ddots & \dots\\a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{bmatrix}$$

矩阵乘法不满足交换律

$$BA=[b_1,b_2,\dots,b_n]\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}=b_1a1+b_2a_2+\cdots+b_na_n$$

可达信奥—小武老师 keda.ac

矩阵练习

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A^T = ?$

$AB = ?$

$A^T B = ?$

可达信奥–小武老师–keda.ac

矩阵与数组

如果说一维数组是一排变量，二维数组就是矩阵。

```
int a[4][5];
// 可得到一个四行五列的数组
// （注意下标从 0 开始
```

	0	1	2	3	4
0	a[0][0]	a[0][1]	a[0][2]	a[0][3]	a[0][4]
1	a[1][0]	a[1][1]	a[1][2]	a[1][3]	a[1][4]
2	a[2][0]	a[2][1]	a[2][2]	a[2][3]	a[2][4]
3	a[3][0]	a[3][1]	a[3][2]	a[3][3]	a[3][4]

矩阵与数组

一个格子的坐标值是 (x,y)，那么它是这个表格 x 行 y 列。

上方：x-1，y
下方：x+1，y
左方：x，y-1
右方：x，y+1

a[x][y] 是第 x 行第 y 列的数据

		x-1,y		
	x,y-1	x,y	x,y+1	
		x+1,y		

矩阵与方程组

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 3y = 7 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

一般地

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = y_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

可达信奥—小武老师—keda.ac

矩阵与方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{11}t_1 + b_{12}t_2 = x_1 \\ b_{21}t_1 + b_{22}t_2 = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}$$

矩阵与方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b_{11}t_1 + b_{12}t_2 = x_1 \\ b_{21}t_1 + b_{22}t_2 = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}(b_{11}t_1 + b_{12}t_2) + a_{12}(b_{21}t_1 + b_{22}t_2) = y_1 \\ a_{21}(b_{11}t_1 + b_{12}t_2) + a_{22}(b_{21}t_1 + b_{22}t_2) = y_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

矩阵与方程组

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

逆矩阵

设A是一个n阶矩阵，若存在另一个n阶矩阵B，使得： AB=BA=I ，则称方阵A可逆，并称方阵B是A的逆矩阵

例子 设 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ 求A的逆矩阵？

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}2a+c & 2b+d\\ -a & -b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

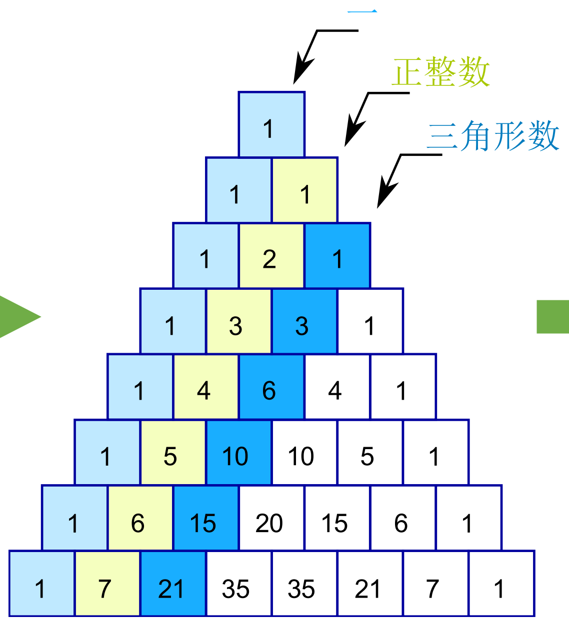
则A的逆矩阵为： $A^{-1}=B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

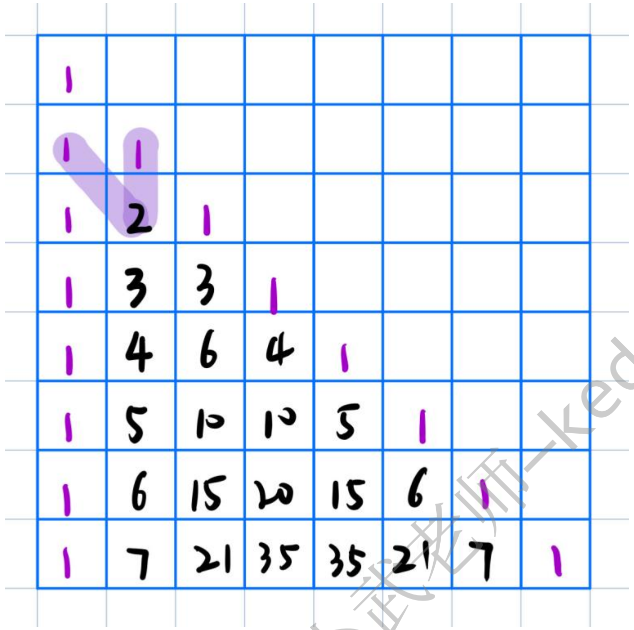
杨辉三角

杨辉三角、杨辉三角递推公式、杨辉三角应用

可达信奥—小武老师—keda.ac

杨辉三角





一般将图形阵列转化成矩阵形式再进行处理

杨辉三角

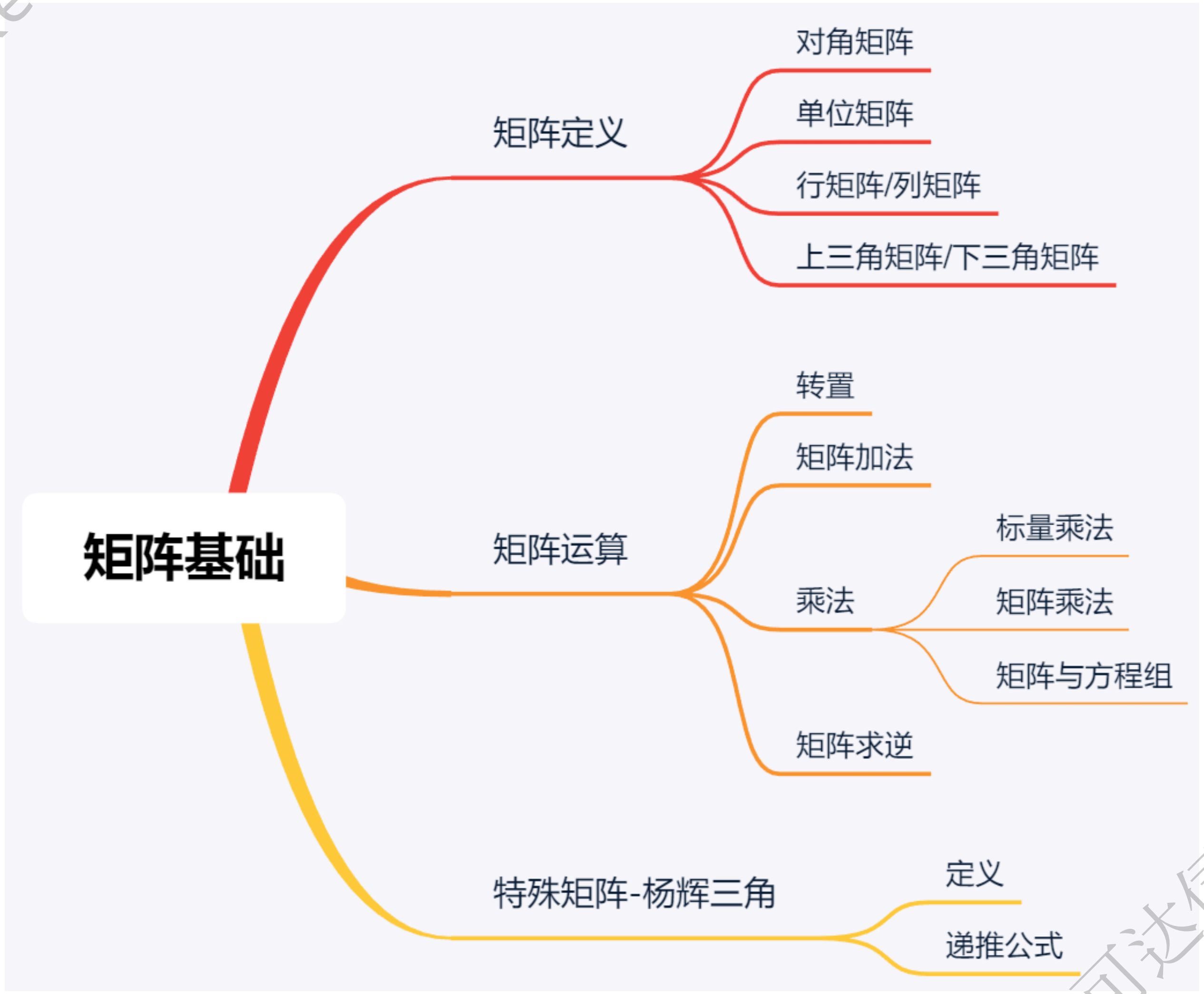
1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

杨辉三角的递推公式：

$$a[i][j] = a[i-1][j] + a[i-1][j-1]$$

注意循环边界条件，初始化时把 a[i][1] 和 a[i][i] 均赋为1。

矩阵总结


矩阵基础
矩阵定义
对角矩阵
单位矩阵
行矩阵/列矩阵
上三角矩阵/下三角矩阵
矩阵运算
转置
矩阵加法
乘法
标量乘法
矩阵乘法
矩阵与方程组
矩阵求逆
特殊矩阵-杨辉三角
定义
递推公式

课后习题与实验

Talk is cheap, show me the code !

下节课见啦！

可达信奥–小武老师–keda.ac