《CSP-J 初级组算法中数学》

Day06-数列基础

主讲人：小武老师

课程大纲

1 初等数论 (上)
奇数、偶数、质数、合数、约数、倍数、因数、最小公倍数、最大公约数、欧几里得算法等

2 初等数论 (中)
算术基本定理、同余关系、孙子定理等

3 初等数论 (下)
质数判定、质数筛、埃氏筛法、线性筛法等

4 函数 (上)
坐标、函数图像、一次函数、变量与函数等

5 函数 (下)
二次函数、指数函数、对数函数、根式与指数幂、幂运算等

6 数列基础
等差数列、等比数列、递推公式、通项公式等

7 矩阵基础
一维矩阵、二维矩阵、矩阵的运算、转置、杨辉三角等

8 数及其运算
数的进制、二进制、八进制、十六进制、编码（ASCII）等

9 计数原理与排列组合 (上)
加法原理、乘法原理、排列与组合、再看杨辉三角等

10 计数原理与排列组合 (下)
捆绑法、插空法、CSP真题训练等

数列

等差数列、等比数列、通项公式、递推公式

数列的概念

数列：按一定次序排列的一列数叫做数列。

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ?, 11, 12$ $\qquad ? = 10$

$1, 3, 5, 7, 9, ?, 13, 15, 17, 19$ $\qquad ? = 11$

$1, 2, 4, ?, 16, 32, 64, 128, 256, 512$ $\qquad ? = 8$

$1, 1, 2, 3, 5, ?, 13, 21, 34, 55, 89, 144$ $\qquad ? = 8$

数列的概念

数列的通项公式：如果数列的第n项a_n与n之间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的通项公式.

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ?, 11, 12$ $\qquad a_n = n$

$1, 3, 5, 7, 9, ?, 13, 15, 17, 19$ $\qquad a_n = 2n - 1$

$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20$ $\qquad a_n = 2n$

数列的概念

数列的递推公式：如果已知数列的第1项（或前几项），且任一项a_n与它的前一项a_{n-1}（或前n项）间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫做这个数列的递推公式。（说明：递推公式也是给出数列的一种方法）

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14\cdots$$

$$a_n = a_{n-1} + 1 \qquad a_1 = 1$$

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$$

$$a_n = a_{n-1} + 2 \qquad a_1 = 1$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad a_1 = 1, a_2 = 1$$

斐波那契数列

“斐波那契数列”的特点是：从“第3项”开始，“每一项”都等于“前两项之和” 。有趣的是，这样一个完全是“自然数”的数列，通项公式却是用“无理数”来表达的。而且当“n”趋向于“无穷大”时，“前一项”与“后一项”的“比值”越来越逼近“黄金分割0.618”，因而人们又称之为“黄金分割数列”。

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144$$

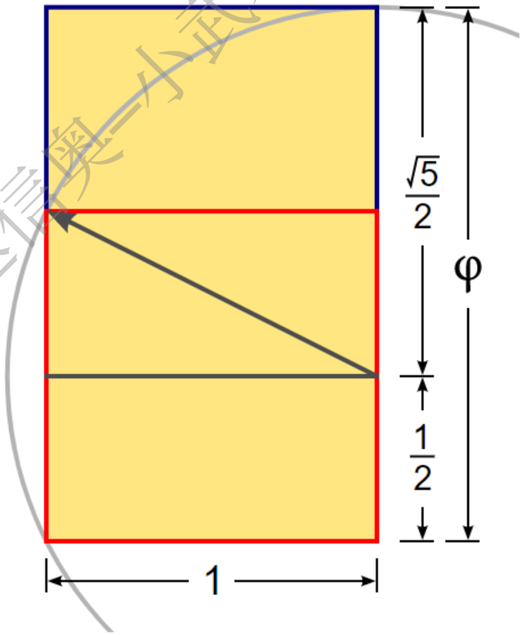
递推公式： $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $a_1 = 1, a_2 = 1$

通项公式：

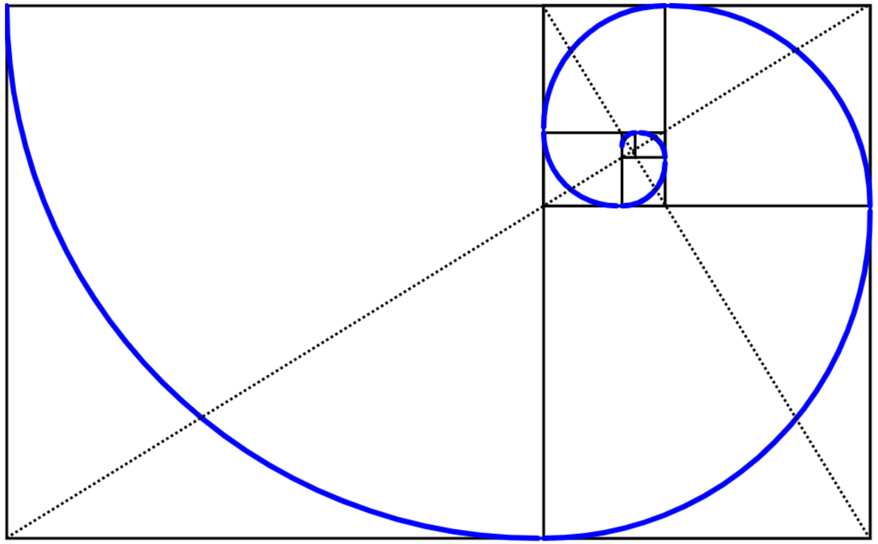
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

斐波那契数列

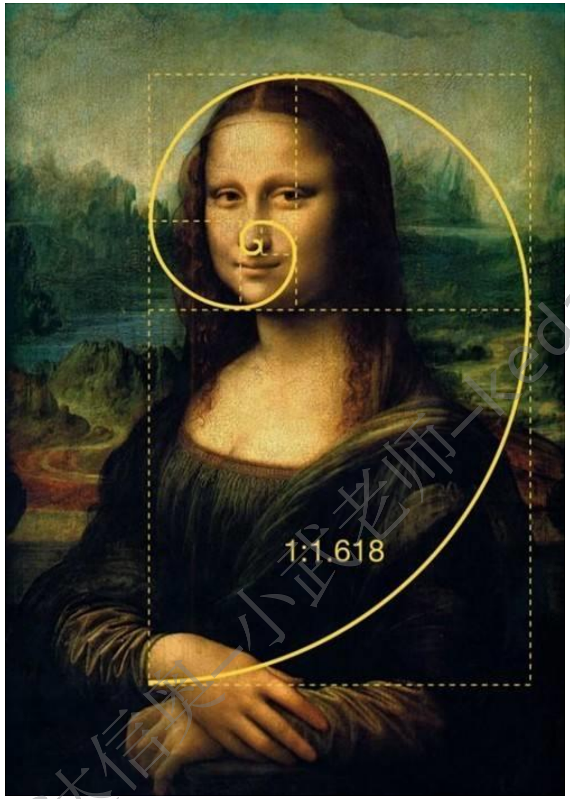
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144$$



$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.6180339887...$$



质点围绕原点逐渐离开，相对于原点的角速度恒定，且相对于原点的距离以等比例增长，则其轨迹为等角螺线



达·芬奇《蒙娜丽莎》

斐波那契数列

等角螺线是由笛卡儿在1638年发现的

笛卡儿

法国哲学家、数学家、物理学家
解析几何之父，代数与几何结合
笛卡尔坐标系、“我思故我在”

雅各布·伯努利

瑞士伯努利家族代表人物之一，数学家
伯努利家族三代中产生了八位科学家
概率论中的伯努利试验与大数定理

雅各布·伯努利的墓碑

下方即为雕刻师误刻的阿基米德螺线

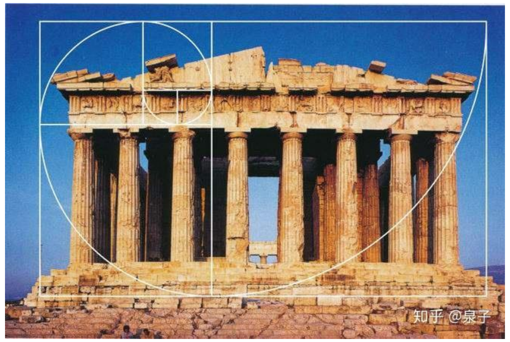
纵使改变，依然故我”
(eadem mutata resurgo)

斐波那契数列

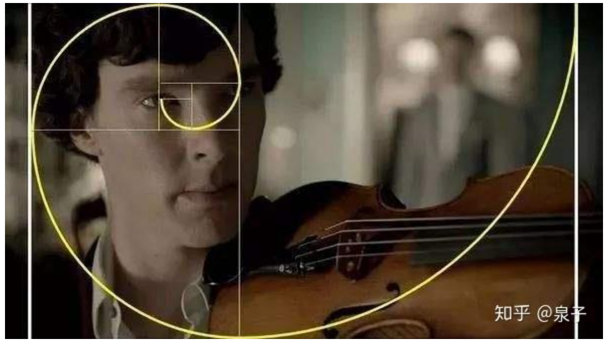

鹦鹉螺的贝壳像等角螺线


旋涡星系的旋臂像等角螺线

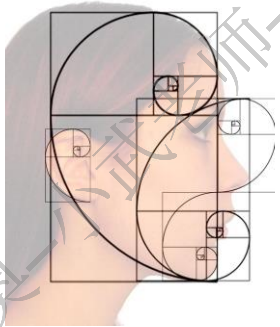

低气压的外观像等角螺线



帕特农神庙



电影构图


耳朵 /人体比例

“数列”是大自然所赐的鬼斧神工，也是人类窥探宇宙的“密码”

等差数列

等差数列概念、递推公式、通项公式、前n项和

等差数列

等差数列：是指从第二项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数的一种数列。而这个常数就叫做公差（一般用字幕d来表示）

公差：等差数列的后一项减去前一项所得的常数。

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ $\quad d = 1$

$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$ $\quad d = 2$

$2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52, 57$ $\quad d = 5$

这些数列有什么共同的特点?

可达信奥—小武老师—keda.ac

等差数列

等差数列通项公式:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 \longrightarrow a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$

$2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52, 57 \longrightarrow a_n = 2 + 5(n-1) = 5n-3$

可达信奥–小武老师–keda.ac

等差数列

例1 等差数列$\{a_n\}$中，如果$a_5=11$，$a_8=5$，求数列的通项公式。

方法一

$$a_5 = a1 + 4d = 11$$

$$a_8 = a1 + 7d = 5$$

$$\longrightarrow \quad a_1 = 19, \quad d = -2$$

$$a_n = 10 + (n-1) \times (-2) = 21 - 2n$$

方法二

$$a_8 - a_5 = 5 - 11 = 3d$$

$$a_5 = a1 + 4d = 11$$

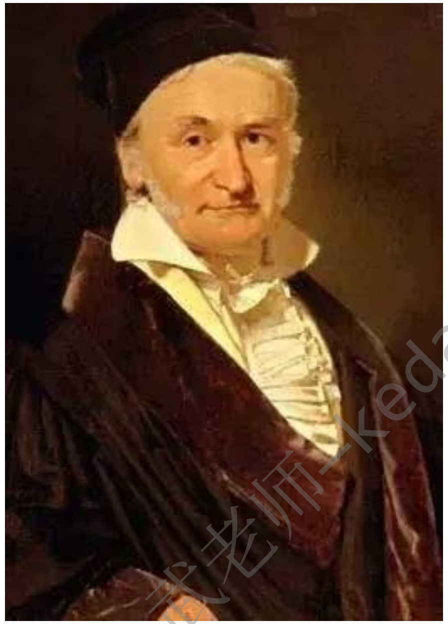
$$\longrightarrow \quad d = -2, \quad a_1 = 19$$

$$a_n = 21 - 2n$$

等差数列

等差数列的前n项和：

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \cdots 100$$



$$S_1 = a_1 = 1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 1 + 2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 + 3$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots a_n$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \qquad S_n = \frac{2na_1 + n(n-1)d}{2}$$

等差数列

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots 100$$
$$S = 100 + 99 + 98 + 97 + \cdots 1$$

$$2S = (1 + 101) \times 100$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \cdots a_1$$

$$2s_n = n(a_1 + a_n)$$

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

等差数列

例2 求以下数列的前n项和

$$2, 4, 6, 8, 10, 12 \cdots 100$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{50(2+100)}{2} = 2550$$

例3 数列$\{a_n\}$的前n项和是: $S_n = n^2 + \frac{1}{2}n$，求a_n的通项公式

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - \frac{1}{2}$$

等比数列

等比数列概念、递归公式、通项公式、前n项和

等比数列

等比数列是指从第二项起，每一项与它的前一项的比值等于同一个常数的一种数列。这个常数叫做等比数列的公比，公比通常用字母q表示(q≠0)，等比数列$a_1 \neq 0$。

公比：等比数列的后一项除以前一项所得的常数。

$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$ $\quad q = 2$

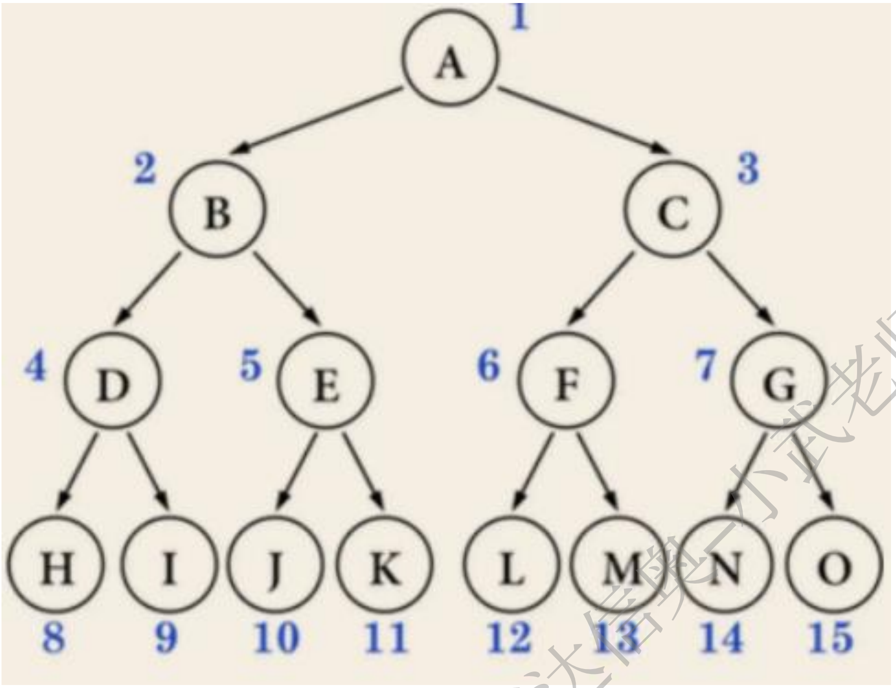
$1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561$ $\quad q = 3$

$1, 5, 25, 125, 625, 3125, 15625$ $\quad q = 5$

等比数列

等比数列是指从第二项起，每一项与它的前一项的比值等于同一个常数的一种数列。这个常数叫做等比数列的公比，公比通常用字母q表示(q≠0)，等比数列$a_1 \neq 0$。

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$$



等比数列

等比数列通项公式:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 \longrightarrow a_n = 2^{n-1}$

$1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561 \longrightarrow a_n = 3^{n-1}$

等比数列

等比数列的前n项和:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$S_1 = a_1 = 1 = a_1 q^0$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 1 + 2 = a_1 q^0 + a_1 q^1$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 + 4 = a_1 q^0 + a_1 q^1 + a_1 q^2$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots a_n$$

等比数列

等比数列的前n项和:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$S_1 = a_1 = 1 = a_1 q^0$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 1 + 2 = a_1 q^0 + a_1 q^1$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 + 4 = a_1 q^0 + a_1 q^1 + a_1 q^2$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n = a_1 q^0 + a_1 q^1 + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}$$

等比数列求和（错位相减法）

等比数列的前n项和：

$$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n \quad (1)$$

$$qS_n = a_1 q + a_2 q + a_3 q + \cdots a_n q \quad (2)$$

(1) – (2) $S_n - qS_n = a_1 - a_n q$ → $(1-q)S_n = a_1 - a_n q$

当q≠1时，$S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

当q=1时，$S_n = na_1$

等比数列求和（错位相减法）

例4 等比数列求和

$$4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512\cdots$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = -4(1-2^n) = 2^{n+2} - 4$$

例5 等比数列求和

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561\cdots$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1-3^n}{-2} = \frac{3^n-1}{2}$$

求通项公式-前向替换法

已知递推公式，求通项公式

例如，考虑如下递推式：
$$\begin{cases} X(n) = 2X(n-1)+1 & n>1 \\ X(1) = 1 \end{cases}$$

$$X(1) = 1$$

$$\begin{aligned} X(2) &= 2X(1)+1 &= 2*1+1 &= 3 \\ X(3) &= 2X(2)+1 &= 2*3+1 &= 7 \\ X(4) &= 2X(3)+1 &= 2*7+1 &= 15 \end{aligned}$$

$$X(n) = 2*(2^{n-1}-1)+1 = 2^n-1 \quad n>0$$

可达信奥-小武老师-keda.ac

求通项公式-反向替换法

例如，考虑如下递推式：
$$\begin{cases} x(n) = x(n-1)+n \\ x(0)=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x(n) &= x(n-1)+n \\ &= x(n-2)+n-1+n \\ &= x(x-3)+n-2+n-1+n \\ &= x(0)+1+2+3+4+5+\cdots+n \\ &= 0+1+2+3+4+\cdots+n \\ &= n(n+1)/2 \end{aligned}$$

求通项公式—换元法（换名）

$$f(n) = f(n/k) + b$$

上面形式的在递推关系式，一个规模为 n 的问题， 每一次递归调用后，都简化为 n/k 规模的问题，为了方便求解，我们设定：$n = k^m$，则，上面的求解过程可简化为：

$$\begin{aligned} f(n) &= f(k^{m-1}) + b \\ &= f(k^{m-2}) + 2b \\ &= f(k^0) + mb \\ &= f(1) + b\log n \end{aligned}$$

可达信奥—小武老师—keda.ac

求通项公式—换元法（换名）

$$T(n)=\begin{cases}1 & n=1\\ T(n/2)+(n-1) & n>1\end{cases}$$

因为每一次规模都减到原来的1/2，所以用换名的方法设 $n=2^k$ ：

$$T(n)=T(n/2)+(n-1)$$

$$=T(2^{k-1})+(2^k-1)$$

$$=[T(2^{k-2})+(2^{k-1}-1)]+(2^k-1)$$

$$=\dots$$

$$=[T(2^{k-k})+(2^1-1)]+\dots+(2^{k-1}-1)+(2^k-1)$$

$$=T(1)+[(2^{k+1}-2)-k]$$

$$=2n-logn-1$$

数列总结

- 数列基础
  - 数列概念
  - 等差数列
    - 定义
    - 通项公式
    - 前n项和
      - 前缀和
  - 等比数列
    - 定义
    - 通项公式
    - 前n项和
  - 根据递推公式求通项公式
    - 前项替换法
    - 后项替换法
    - 换元法

算法复杂度度

可达信奥–小武老师–keda.ac

课后习题与实验

Talk is cheap, show me the code !

下节课见啦！