

声明：本课件及视频版权归小武老师所有，禁止任何组织及个人分发、抄袭、售卖等，违者将追究其法律责任！

《CSP-J 初级组算法中数学》

Day05-函数(下)

主讲人：小武老师



课程大纲



1 初等数论(上)

奇数、偶数、质数、合数、约数、倍数、因数、最小公倍数、最大公约数、欧几里得算法等

2 初等数论(中)

算术基本定理、同余关系、孙子定理等

3 初等数论(下)

质数判定、质数筛、埃氏筛法、线性筛法等

4 函数(上)

坐标、函数图像、一次函数、变量与函数等

5 函数(下)

二次函数、指数函数、对数函数、根式与指数幂、幂运算等

6 数列基础

等差数列、等比数列、递推公式、通项公式等

7 矩阵基础

一维矩阵、二维矩阵、矩阵的运算、转置、杨辉三角等

8 数及其运算

数的进制、二进制、八进制、十六进制、编码(ASCII)等

9 计数原理与排列组合(上)

加法原理、乘法原理、排列与组合、再看杨辉三角等

10 计数原理与排列组合(下)

捆绑法、插空法、CSP真题训练等

声明：本课件及视频版权归小武老师所有，禁止任何组织及个人分发、抄袭、售卖等，违者将追究其法律责任！

二次函数

二次函数性质、与一次函数比较



二次函数



一次函数

$$y = kx + b, k \neq 0$$

二次函数

$$y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$$

$$y = ax^2, (a \neq 0)$$

$$y = ax^2 + c, (a \neq 0)$$

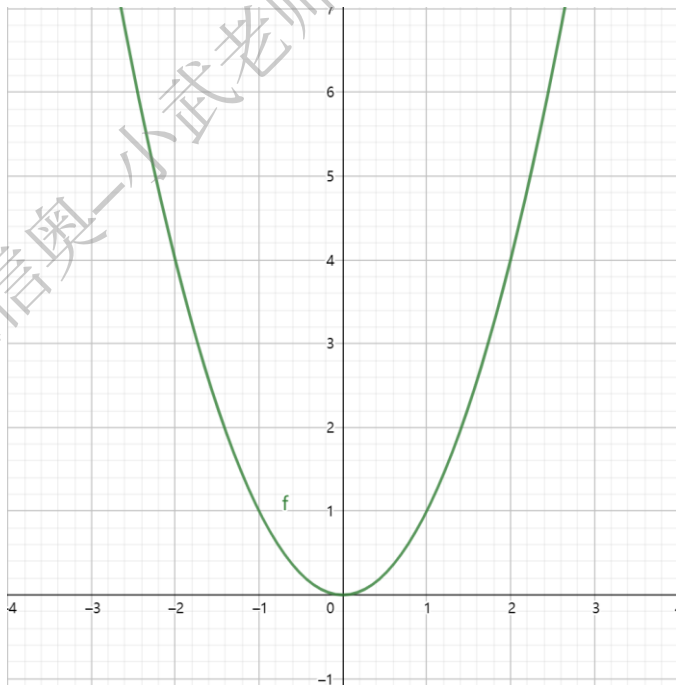
$$y = ax^2 + bx, (a \neq 0)$$



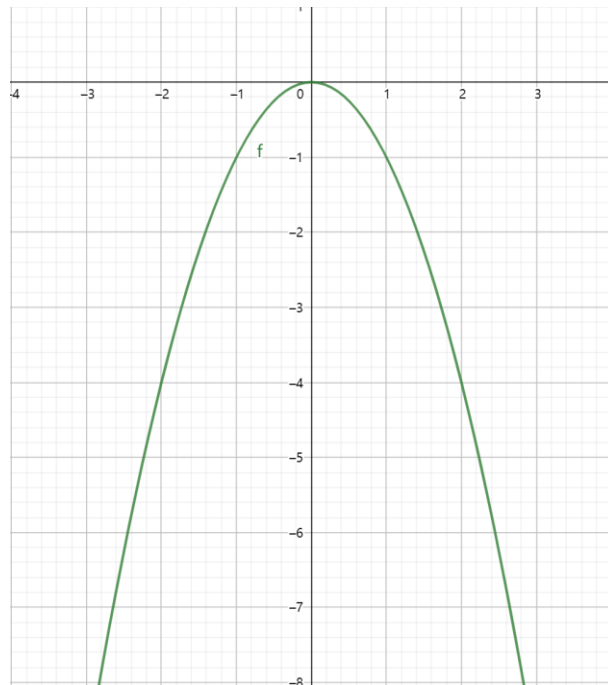
二次函数图像



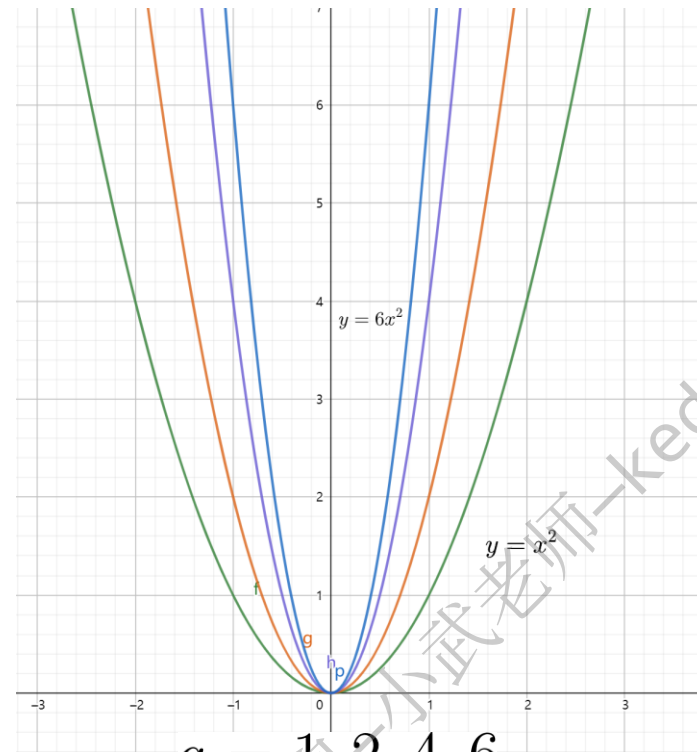
$$y = ax^2, (a \neq 0)$$



$(a > 0)$



$(a < 0)$



$a = 1, 2, 4, 6$

$a > 0$, 开口向上; $a < 0$, 开口向下。 a 的绝对值越大, 抛物线的开口越小;



二次函数图像



$$(a + b)^2 = (a + b) \times (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$y = (x - h)^2$$



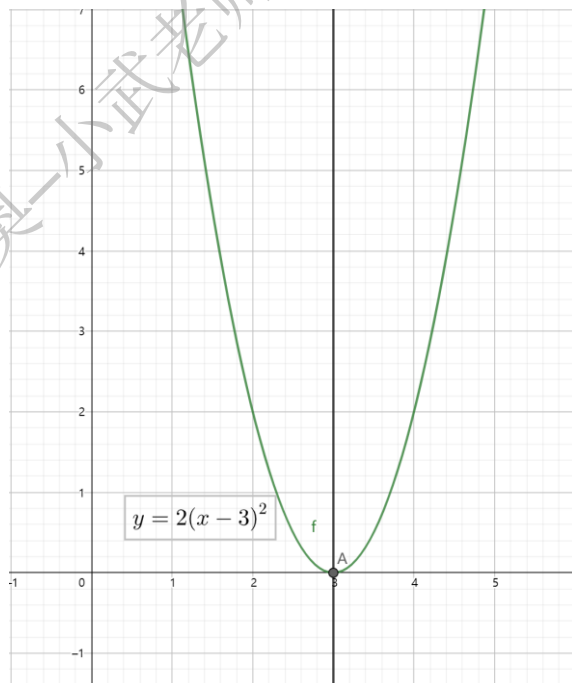
$$y = x^2 - 2hx + h^2$$



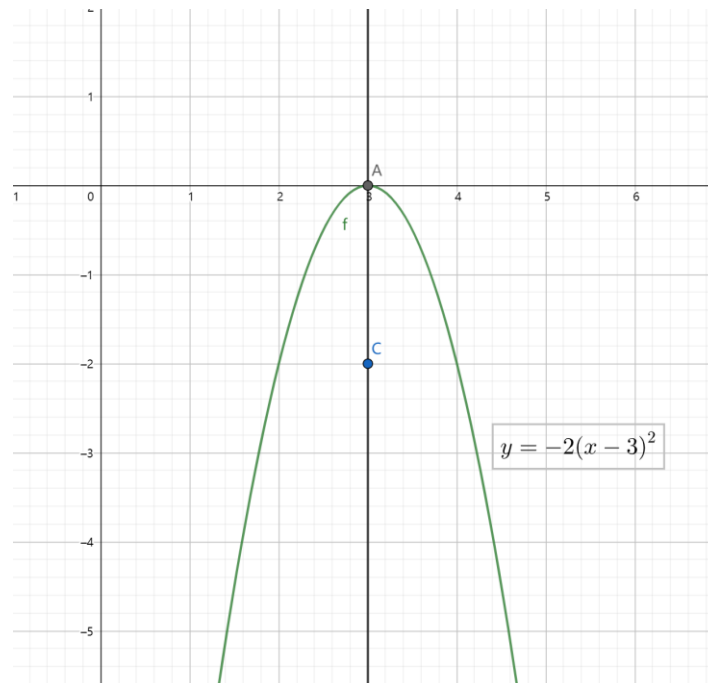
二次函数图像



顶点式 $y = a(x - h)^2, (a \neq 0)$



$(a > 0)$



$(a < 0)$

对称性

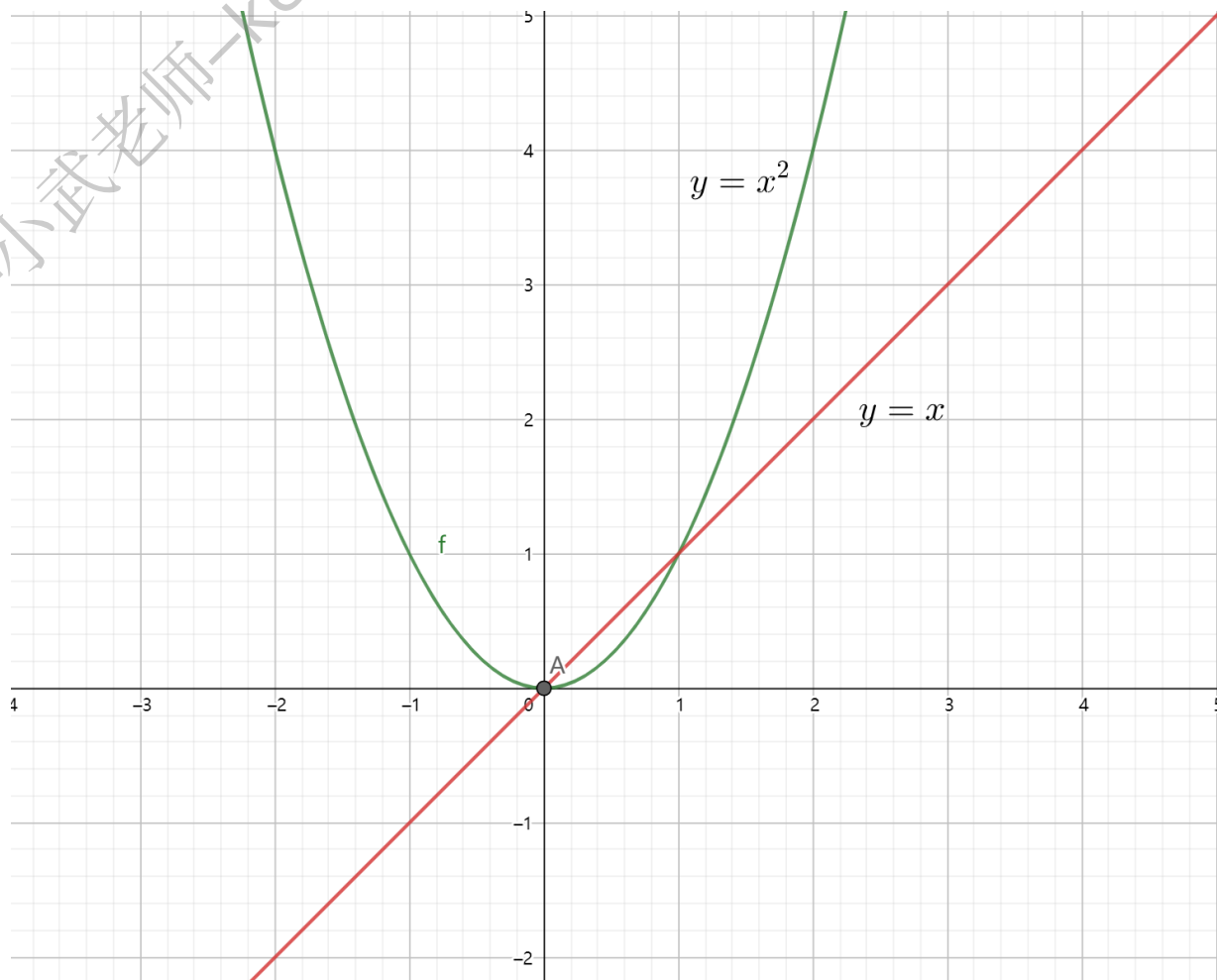
单调性

平移变换

$a > 0$, $x > h$ 时, y 随 x 的增大而增大; $a < 0$, $x > h$ 时, y 随 x 的增大而减小



二次函数 VS 一次函数



哪个函数增长的更快?

谁的阶更高?

$O(n^2) > O(n)$

声明：本课件及视频版权归小武老师所有，禁止任何组织及个人分发、抄袭、售卖等，违者将追究其法律责任！

指数函数

指数、指数幂、根式、幂运算、指数函数



指数与幂运算



指数是幂运算的 a^m ($a \neq 0$) 中的一个参数， a 为底数， m 为指数，指数位于底数的右上角。叫做 a 的 m 次幂，也叫做 a 的 m 次方。

$$a^m = \underbrace{a \times a \times a \cdots a}_{m\text{个}}$$

当 $m = 0$ 时, $a^0 = 1$

当 $m = 2$ 时, 成为平方

$$3^2, 5^2$$

当 $m = 3$ 时, 成为立方

$$3^3, 5^3$$

$$2^0 = 1, 1001^0 = 1$$



指数与幂运算



指数是幂运算的 a^n ($a \neq 0$) 中的一个参数， a 为底数， n 为指数，指数位于底数的右上角。

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$3^2 \cdot 3^3 = 3^5$$

$$2^3 \cdot 2^7 = 2^{10}$$

$$3^3 \div 3^2 = 3$$

$$2^8 \div 2^3 = 2^5$$

$$(2^3)^2 = 2^6 \quad (3^{100})^{10} = 3^{1000}$$

$$(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 \quad (5 \cdot 2)^2 = 5^2 \cdot 2^2$$



根式



一般地，如果 $x^n=a$ ，那么 x 叫做 a 的 n 次方根，其中 $n>1$ ，且 $n\in\mathbb{N}$ 。

如果一个数的平方等于 a ，则这个数叫做 a 的平方根

$$\begin{aligned}2^2 &= 4 \\ (-2)^2 &= 4\end{aligned}$$



2, -2 叫做4的平方根

记做： $2 = \sqrt{4}$

如果一个数的立方等于 a ，则这个数叫做 a 的立方根

$$\begin{aligned}2^3 &= 8 \\ (-2)^3 &= -8\end{aligned}$$



2 叫做8的立方根

-2 叫做-8的立方根

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$



根式



一般地，如果 $x^n=a$ ，那么 x 叫做 a 的 n 次方根，其中 $n>1$ ，且 $n\in\mathbb{N}$ 。

如果一个数的5次方等于 a ，则这个数叫做 a 的5次方根

$$2^5 = 32$$

$$(-2)^5 = -32$$



2是32的5次方根

-2是-32的5次方根

归纳总结

$$2^n = a$$



2是 a 的 n 次方根

$$\sqrt[n]{a} = 2$$

$$x^n = a$$



x 是 a 的 n 次方根

$$\sqrt[n]{a} = x$$



根式



一般地，如果 $x^n=a$ ，那么 x 叫做 a 的 n 次方根，其中 $n>1$ ，且 $n\in\mathbb{N}$ 。

如果一个数的5次方等于 a ，则这个数叫做 a 的5次方根

$$2^5 = 32$$

$$(-2)^5 = -32$$



2是32的5次方根

-2是-32的5次方根

归纳总结

$$2^n = a$$



2是 a 的 n 次方根

$$\sqrt[n]{a} = 2$$

$$x^n = a$$



x 是 a 的 n 次方根

$$\sqrt[n]{a} = x$$



正数的分数指数幂



规定：

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

规定：

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

$$a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$



指数函数



一次函数

$$y = kx + b, k \neq 0$$

二次函数

$$y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$$

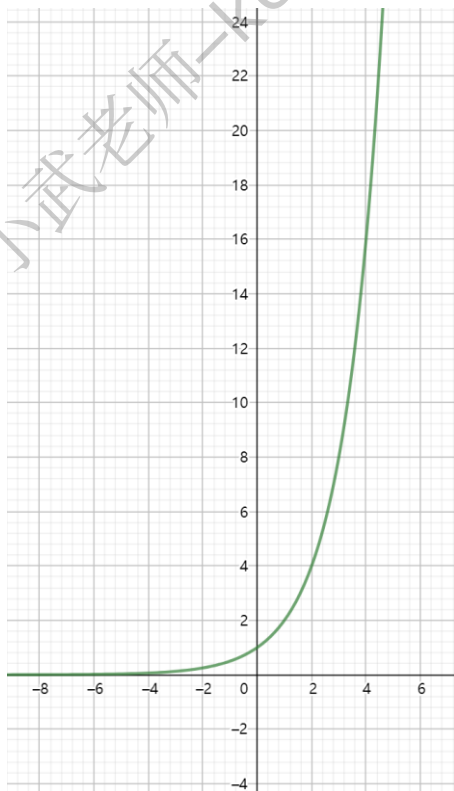
指数函数

$$y = a^x, (a > 0, a \neq 1)$$

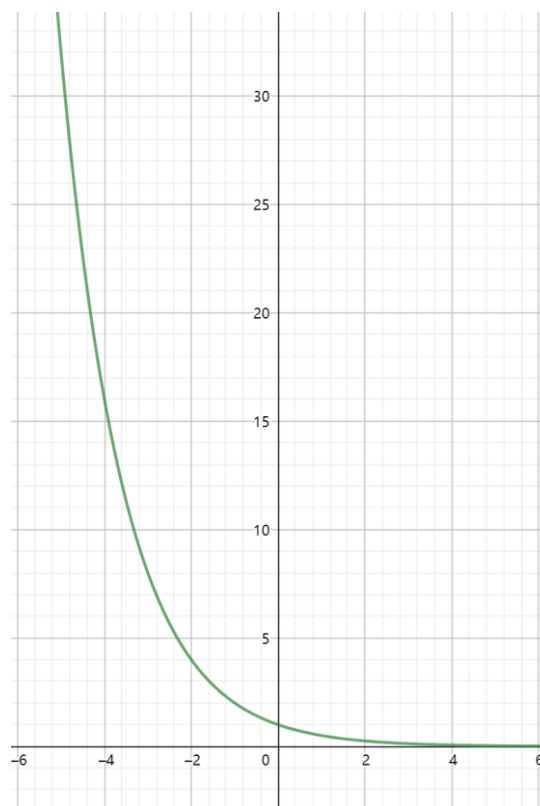


二次函数图像

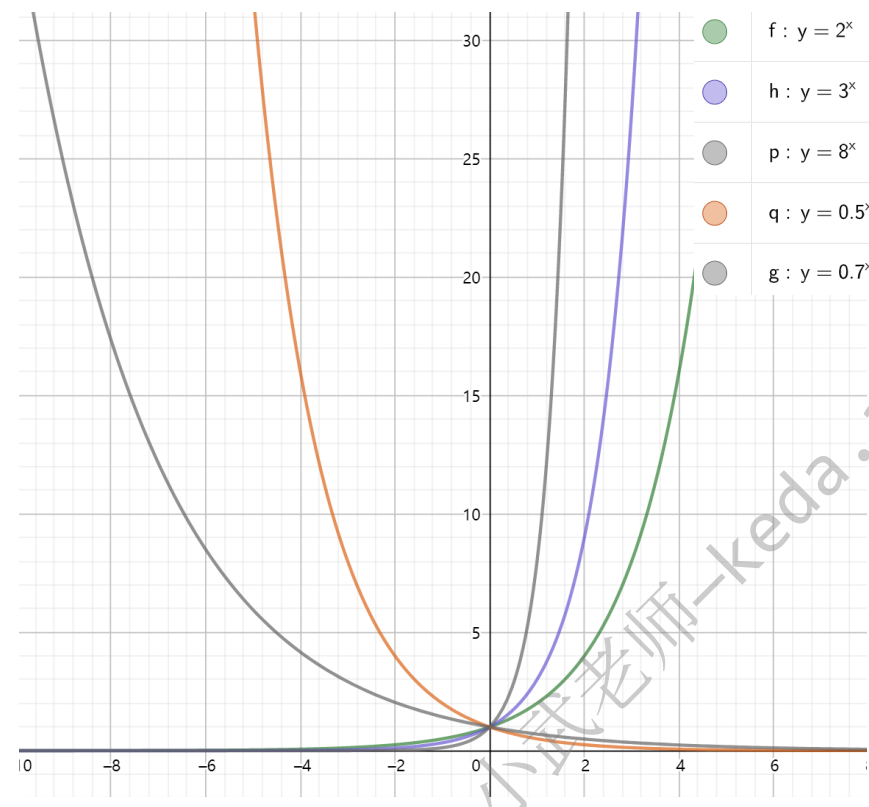
$$y = a^x, (a > 0, a \neq 1)$$



$$(a = 2)$$



$$(a = 0.5)$$

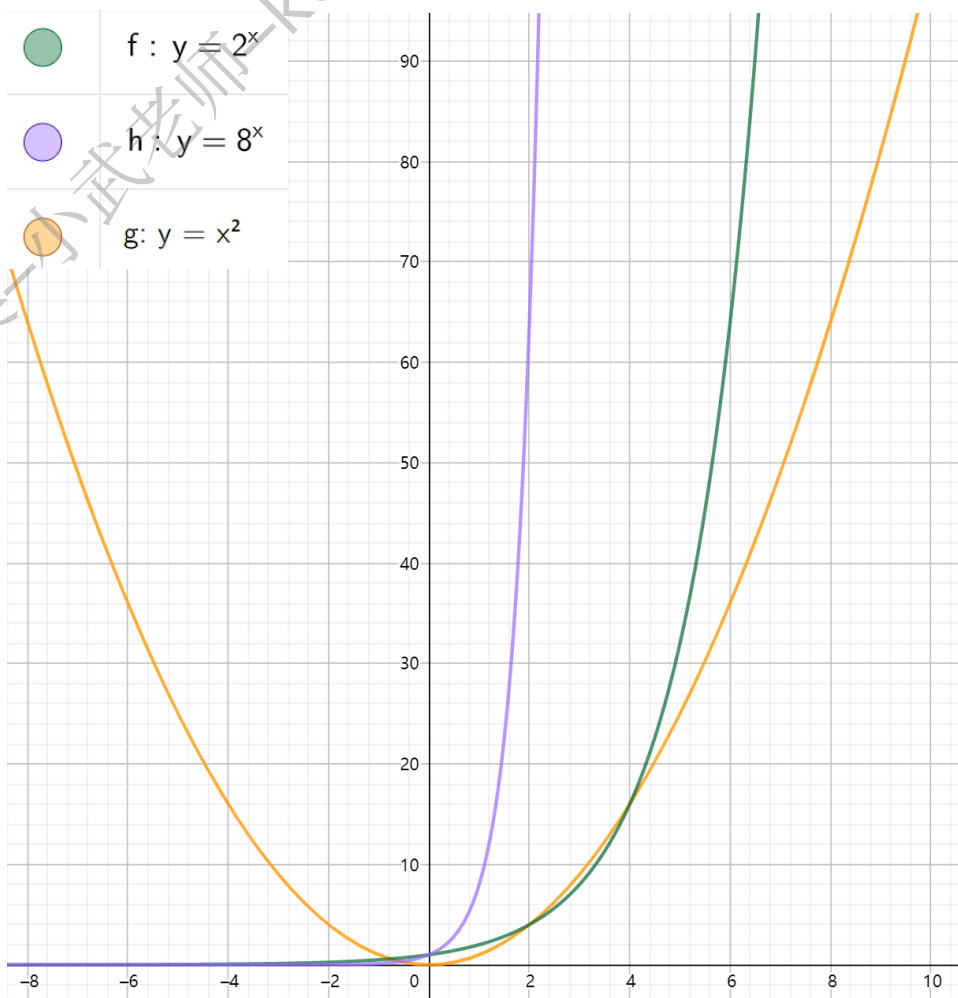


$$a = 0.5, 0.7, 2, 3, 8$$

$0 < a < 1$, y 随 x 的增大而减小。 $a > 1$, y 随 x 的增大而增大。



指数函数 VS 二次函数



哪个函数增长的更快？

谁的阶更高？

$$O(2^n) > O(n^2)$$

声明：本课件及视频版权归小武老师所有，禁止任何组织及个人分发、抄袭、售卖等，违者将追究其法律责任！

对数函数

指数与对数、指数函数与对数函数



对数的定义



对数定义：若 $a^m = n (a > 0)$ ，则 m 叫做以 a 为底 n 的对数。

$$a^m = n$$



$$m = \log_a n$$

$$2^3 = 8$$

$$3 = \log_2 8$$

$$3^4 = 81$$



$$4 = \log_3 81$$

$$10^3 = 1000$$

$$3 = \log_{10} 1000$$

$$\log_a a = ?$$

$$a^1 = a$$



对数运算



$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^n = n \log_a M$$

1证明:

$$a^x = m$$

$$a^y = n$$

$$x = \log_a m$$

$$y = \log_a n$$

$$a^{x+y} = m \cdot n$$

$$x + y = \log_a(mn)$$



换底公式



$$\log_a N = \frac{\log_m N}{\log_m a}$$

证明：

令 $\log_a N = x$ 则 $a^x = N$ 两边取以 m 为底的对数，得到

$$\log_m a^x = \log_m N \longrightarrow x \log_m a = \log_m N$$

$$x = \frac{\log_m N}{\log_m a} \longrightarrow \log_a N = \frac{\log_m N}{\log_m a}$$



计算



$$\log_2 16 = 4$$

$$2^4 = 16$$

$$\log_2 1 = 0$$

$$2^0 = 1$$

$$\log_6 3 + \log_6 2 = 1$$

$$\log_6 (3 \times 2) = \log_6 6 = 1$$

$$\log_3 3^{1024} = 1024$$

$$3^{1024} = 3^{1024}$$



对数函数



指数函数

$$y = a^x, (a > 0, a \neq 1)$$

对数函数

$$y = \log_a x, (a > 0, a \neq 1)$$

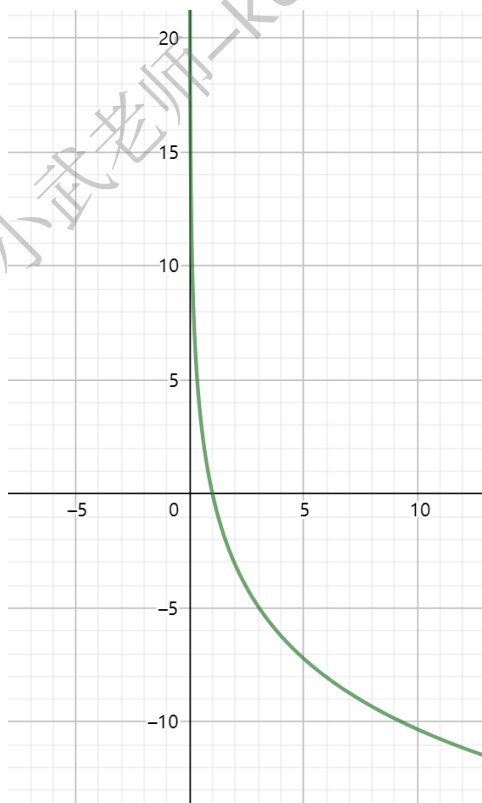
如果 $a^x=N$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) , 那么数 x 叫做以 a 为底 N 的对数, 记作 $x=\log_a N$, 读作以 a 为底 N 的对数, 其中 a 叫做对数的底数, N 叫做真数。



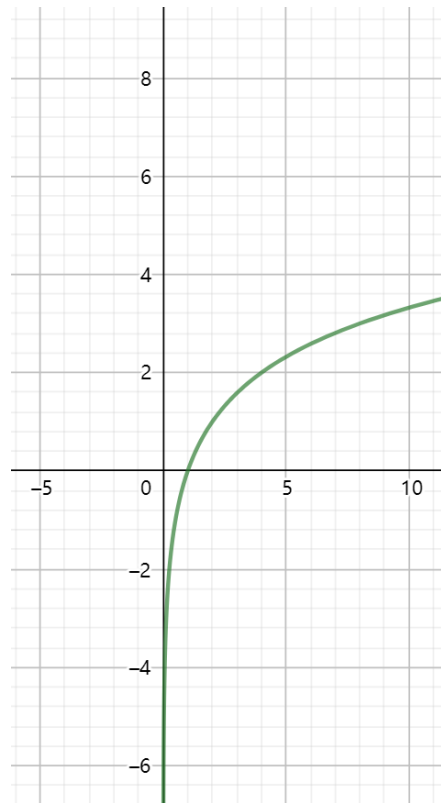
对数函数图像



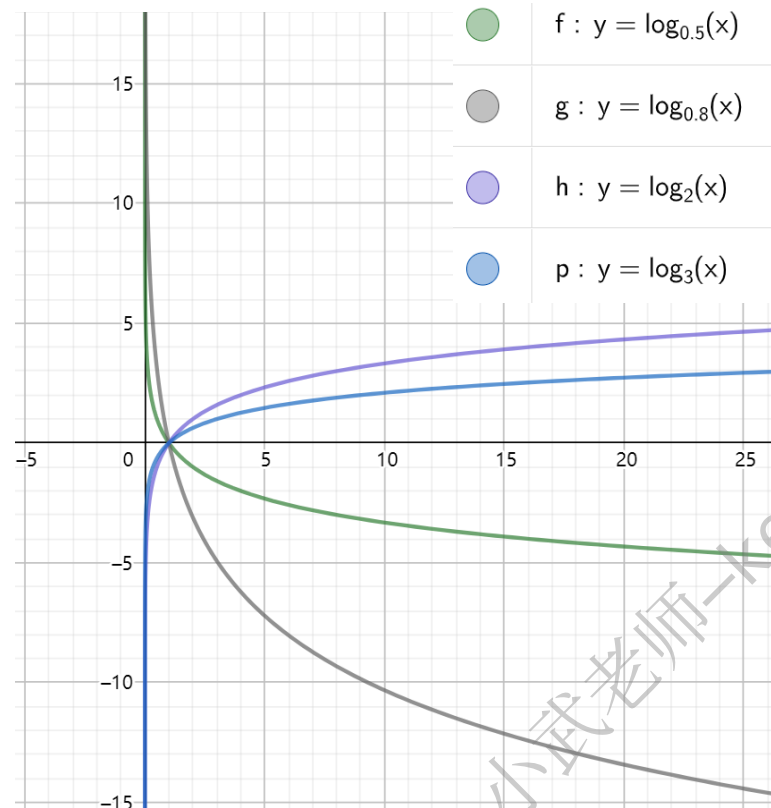
$$y = a^x, (a > 0, a \neq 1)$$



($a = 0.8$)



($a = 2$)

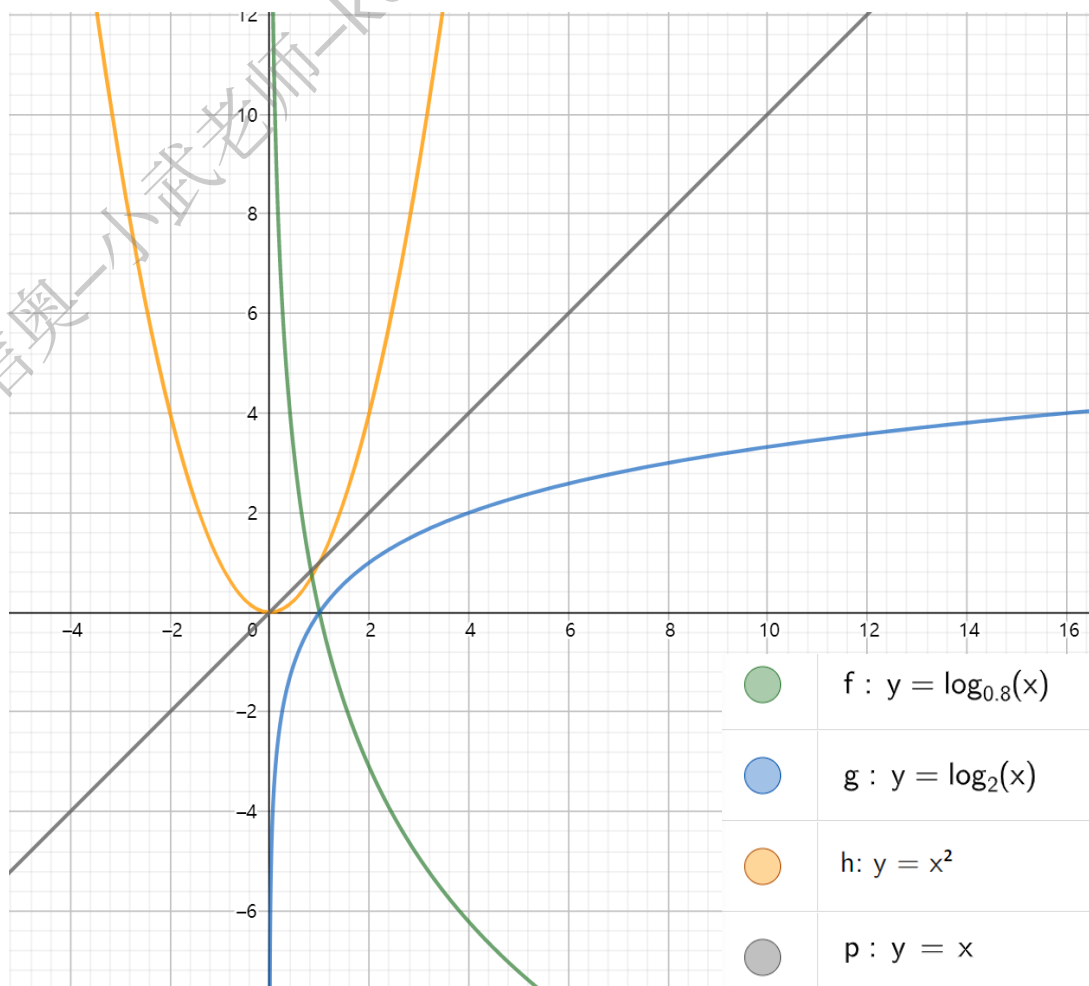


$a = 0.5, 0.8, 2, 3$

$0 < a < 1$, y 随 x 的增大而减小, a 的值越大, 下降越快。
 $a > 1$, y 随 x 的增大而增大, a 的值越大, 上升越慢。



函数比较



哪个函数增长的更快？

谁的阶更高？

$$O(n^2) > O(n) > O(\log_2 x)$$

课后习题与实验

Talk is cheap, show me the code !





函数总结



声明：本课件及视频版权归小武老师所有，禁止任何组织及个人分发、抄袭、售卖等，违者将追究其法律责任！

下节课见啦！